XII Workshop de Verão do DMA-UFV
04 a 06 de março de 2020

Resumos dos Minicursos

1. Título: **Transformada de Fourier: Motivação e Aplicação**
   Ministrante: *Prof. Dr. Amarísio da Silva Araújo - UFV*

   Resumo: Neste minicurso, serão abordadas algumas motivações e aplicações da Transformada de Fourier. Para tal, apresentaremos, inicialmente, uma revisão de Séries de Fourier, a partir da resolução da equação de condução do calor em uma barra. Em seguida, tendo como motivação a determinação dos coeficientes de Fourier de uma dada função característica, será estabelecido o conceito de Transformada de Fourier. Do conceito de Transformada de Fourier, chega-se, naturalmente, ao conceito de Convolução. A partir das propriedades da Transformada de Fourier e da Convolução, será feita, então, uma discussão ampliada sobre a resolução da equação de condução do calor em uma barra.

2. Título: **Introdução as espaços de Hilbert e aplicações**
   Ministrante: *Profa. Dra. Margareth da Silva Alves - UFV*

   Resumo: O minicurso será direcionado, principalmente, aos estudantes de Bacharelado e Mestrado em Matemática ou áreas afins. Pretende-se uma abordagem concisa sobre as propriedades dos espaços de Hilbert e dos operadores lineares contínuos sobre eles, com a finalidade de apresentar os Teoremas da Representação de Riesz-Fréchet e Lax-Milgram. Através de aplicações evidenciaremos a relevância desse último teorema como ferramenta na Teoria das Equações Diferenciais Parciais e na solução de problemas variacionais.

Referências

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer-Verlag. 2010.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional.* Textos Universitários. Editora SBM. 2012.

[3] L. Debnath & P. Mikusiński . *Introduction to Hilbert Spaces with Apllications.* Elsevier Academic Press. 2005.

[4] E. Kreysig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. 1978.

3. Título: **Caos, Dinâmica Hiperbólica e Transformações Expansoras, no S^1**
   Ministrante: *Profa. Dra. Pouya Mehdipour - UFV*

Resumo: Neste minicurso, vamos lidar com assuntos como caos de Devaney, a dinâmica hiperbólica de Morse-Smale e as transformações expansoras do S^1. Veremos que, usando a dinâmica simbólica, poderemos detectar o caos e obter informações sobre a estabilidade estrutural ou a entropia do sistema.

Referências

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4, pp. 332-334, 1992

[2] A. Katok; Boris Hasselblatt; Introduction to the modern theory of dynamical systems. (English summary) With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] F. Abdenur e F. Nobili, Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um.Publicações Matemáticas, IMPA, 2007.

4. Título: **Introdução à Teoria de Códigos Corretores de Erros**
   Ministrante: *Profa. Ph.D. Marinês Guerreiro - UFV*

   Resumo: Códigos corretores de erros são muito utilizados na transmissão de mensagens por vários meios desde a sua criação, na década de 60 do Século XX, e muito mais atualmente com a quantidade enorme de informação que transita nas redes.
   A Matemática utilizada para o desenvolvimento dos códigos é muito interessante e envolve desde conhecimento de tópicos elementares de Álgebra Linear até estruturas algébricas mais elaboradas, principalmente a Teoria de Corpos Finitos.
   Neste minicurso, pretendo introduzir o assunto, ilustrando como a Matemática considerada muito abstrata, como a Álgebra, tem um papel muito importante na dinâmica da Tecnologia da Informação, uma das áreas mais dinâmicas de pesquisa e desenvolvimento no mundo atual.
   Os principais tópicos abordados serão: códigos corretores de erros, métrica de Hamming, exemplos de códigos, noções de corpos finitos, códigos lineares, anéis de polinômios e códigos cíclicos.

5. Título: **Aplicações entre superfícies fechadas**
   Ministrante: *Profa. Dra. Catarina Mendes de Jesus Sánchez - UFV*

   Resumo: O objetivo é estudar as singularidades de aplicações entre superfícies fechadas, do ponto de vista global, e apresentar alguns invariantes topológicos destas aplicações para a classificação dos conjuntos singulares destas. Além disso, apresentar exemplos e forma de construir aplicações estáveis entre superfícies com conjuntos de curvas singulares pré-determinadas.

Anexo II - Resumos das Conferências

1. Título: **On the number of fully weighted zero-sum subsequences**
   Ministrante: *Prof. Dr. Abílio Lemos - UFV*

   Resumo: Let G be a finite additive abelian group with exponent n and $S = g_1 \cdots g_t$ be a sequence of elements in G. For any element g of G and $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, let $N_{A,g}(S)$ denote the number of subsequences $T = \prod_{i \in I} g_i$ of S such that $\sum_{i \in I} a_i g_i = g$, where $I \subseteq \{1, \ldots, t\}$ and $a_i \in A$. We prove that $N_{A,0}(S) \geq 2^{|S| - D_A(G)+1}$, when $A = \{1, \ldots, n-1\}$, where $D_A(G)$ is the smallest positive integer l, such that every sequence S over G of length at least l has nonempty subsequence $T = \prod_{i \in I} g_i$ such that $\sum_{i \in I} a_i g_i = 0$, $I \subseteq \{1, \ldots, t\}$ and $a_i \in A$. Moreover, we classify the sequences such that $N_{A,0}(S) = 2^{|S| - D_A(G)+1}$, where the exponent of G is an odd number.

2. Título: **O conceito de curvatura de curvas planas no contexto das geometrias afim, centroafim, projetiva e discreto**
   Ministrante: *Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro - UFMG*

   Resumo: Discuremos invariantes geométricos de curvas planas do ponto de vista de diversos contextos geométricos, no sentido de Felix Klein. Ou seja trataremos de responder à seguintes perguntas: Se consideramos outros grupos agindo no plano, por exemplo o grupo de transformações afins, ao invés do grupo de isometrias do plano euclidiano, que invariantes geométricos aparecem em lugar da curvatura? Vale um teorema de quatro vértices? Isso serve para alguma coisa?

   Pre-requisito: cálculo de várias variáveis, fórmula de Taylos, regra da cadeia e o conceito de curvatura de curvas planas

3. Título: **Linear Weingarten surfaces in Homogeneous manifold with isometry group of dimension four**
   Ministrante: *Prof. Dr. Carlos Peñafiel - UFRJ*

   Resumo: In this talk we study the phase portrait of a rotational sphere whose mean and extrinsic curvature satisfies a linear Weingarten type equation.

4. Título: **Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$**
   Ministrante: *Profa. Dra. Abigail Silva Duarte Folha - UFF*

   Resumo: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um dominio conexo e simplesmente conexo cujo bordo $\partial\Omega$ é compacto. Seja $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Existe uma função suave $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que seu gráfico possui a menor área dentre todos os gráficos de funções suaves definidas em Ω com valor de bordo φ? Ao estudar esta pergunta somos conduzidos às *superfícies mínimas*. Vamos mostrar algumas propriedades destas superfícies e mostrar alguns exemplos.

5. Título: **On supercritical problems involving the Laplace operator**
   Ministrante: *Prof. Dr. Anderson Luiz Albuquerque - UFV*

   Resumo: We discuss the existence, nonexistence and multiplicity of solutions for a class of elliptic equations in the unit ball with zero Dirichlet boundary conditions involving nonlinearities with supercritical growth. By using Pohozaev type identity we prove a nonexistence result for a class of supercritical problems with variable exponent which allow us to complement the analysis developed in some work of J.M. do O, B. Ruf and P. Ubilla, Calc. Var. and P.D.E.(2006). Moreover, we establish existence results of positive solutions for semilinear elliptic equations involving nonlinearities which are subcritical at infinity just in a part of the domain.

   Autores: Rodrigo Clemente, Joao Marcos do O e Pedro Ubilla

6. Título: **O Teorema de Monsky: como dividir um quadrado em triângulos de mesma área?**
   Ministrante: *Prof. Dr. Alessandro Gaio Chimenton - UFF*

   Resumo: É possível dividir um quadrado em um número ímpar de triângulos de mesma área não sobrepostos? Esta pergunta simples, cuja resposta é surpreendentemente não, foi proposta por Fred Richman em 1965, quando este ainda era estudante de mestrado na Universidade do Novo México. Richman colocou este enunciado em sua ementa de exame de qualificação, mas não conseguiu obter uma resposta e acabou por retirar o problema da ementa. Após várias tentativas em casos particulares, percebeu que o problema era delicado e enviou-o para a seção de "problemas"da revista American Mathematical Monthly ("Problem 5479"). Em 1968 o próprio Richman publicou na mesma revista uma solução parcial e apenas em 1970, Paul Monsky, na época um já consagrado matemático e hoje professor emérito na Universidade de Brandeis (EUA), fornece uma demonstração para a negativa da conjectura de Richmann usando ferramentas aritméticas e combinatórias. A prova de Monsky é desde então lembrada por sua incrível simplicidade, beleza e criatividade no uso de ferramentas inusitadas. Nesta palestra, exporemos o método de Monsky e suas conexões com os consagrados Lemas de Sperner, que são ferramentas simples de combinatória com consequências profundas em computação.

7. Título: **Frações Contínuas e a Transformação de Gauss**
   Ministrante: *Prof. Dr. Miguel Adriano Koiller Schnoor - UFF*

   Resumo: Quantos quadrados são necessários para se montar um retângulo? Esse problema, que aparenta ser puramente geométrico, possui na realidade uma relação direta com o que chamamos de Frações Contínuas (ou Frações Continuadas). Explicarei o que são esses objetos matemáticos e como eles se relacionam com a área de Sistemas Dinâmicos.

8. Título: **Auto-funções de Operadores Positivos e suas Aplicações em Sistemas Dinâmicos e Física-Matemática**
   Ministrante: *Prof. Dr. Leandro Cioletti - UnB*

   Resumo: O Formalismo Termodinâmico é reconhecido hoje em dia como umas das técnicas mais bem sucedidas no estudo de certas propriedades assintóticas de sistema dinâmicos que exibem um certo grau de caoticidade. Uma das ideias principais neste contexto, consiste em construir, à partir do sistema dinâmico, uma classe de processos estocásticos e usar algumas ideias e técnicas da Teoria de Probabilidade para entender alguns aspectos do comportamento assintótico ou estatístico do sistemas dinâmico em questão. A base de todo o sucesso do Formalismo Termodinâmico é que ele se compõe de um conjunto de técnicas que nos permite associar a um sistema dinâmico não-linear (em geral, bastante complicado) um operador linear positivo, agindo em um determinado espaço de Banach. Este operador é conhecido como operador de transferência. Esta ferramenta permite traduzir algumas questões intrínsecas a teoria de Sistema Dinâmico em questões sobre o espectro do operador de transferência associado, que em diversos casos é possível de ser compreendido.
   O objetivo desta palestra é explicar parte destas ideias para um público não-especializado e mencionar alguns resultados recentes de pesquisa nesta direção.

9. Título: **O Crivo de Turán aplicado a torneios**
   Ministrante: *Prof. Dr. Savio Ribas - UFOP*

   Resumo: Nessa palestra, vamos apresentar o método do Crivo de Turán em um contexto combinatório, e aplicar sua versão deslocada aos torneios em grafos (grafos completos direcionados). Mais precisamente, vamos obter cotas superiores para o número de torneios que contêm um número pequeno de r-ciclos restritos (no caso de torneios normais e multipartidos) ou irrestritos (no caso de torneios bipartidos). Informalmente, vamos mostrar que em torneios de esportes sem empate, quase sempre existem equipes A1, A2, ..., Ar tais que A1 vence A2, que vence A3, ..., que vence Ar, que vence A1. Esse trabalho foi feito em conjunto com W. Kuo, Y.-R. Liu e K. Zhou (University of Waterloo/Canadá).

10. Título: **Gênero em construções livres de grupos nilpotentes finitamente gerados**
    Ministrante: *Prof. Dr. Anderson Luiz Pedrosa Porto - UFVJM*

    Resumo: Nesta palestra nós falaremos sobre o conceito de gênero em produtos livres amalgamados e HNN-extensões de grupos nilpotentes finitamente gerados com um subgrupo amalgamado (associados) finito relativos a certas classes de grupos. Discutiremos exemplos quando o gênero tem cardinalidade igual a 1 e no final exporemos alguns problemas ainda não resolvidos.

11. Título: **Ordem induzida por ruido em dinamicas não uniformemente hiperbolicas**
    Ministrante: *Prof. Dr. Isaia Nisoli - UFRJ*

    Resumo: Nessa palestra vou apresentar um resultado curioso em sistemas dinamicos com ruido aditivo. Ao crescer da amplitude do ruido o expoente de Lyapunov do sistema com ruido aditivo transiciona de positivo pra negativo, i.e., mais ruido diminui o "caos" do sistema. Vou mostrar alguns exemplos elementares desse comportamento.

12. Título: **Refined scales of decaying rates of operator semigroups on Hilbert spaces: typical behaviour**
    Ministrante: *Prof. Dr. Moacir Aloisio Nascimento dos Santos - UFAM*

    Resumo: This talk is about relations between the decaying rates of operator semigroups on Hilbert spaces and some spectral properties of their respective generators. We show that the decaying rates of orbits of semigroups which are stable but not exponentially stable, typically in Baire?s sense, depend on sequences of time going to infinity. This is joint work with Silas L. Carvalho and César R. de Oliveira.

13. Título: **Alguns problemas elípticos críticos e supercríticos: existência, não existência e multiplicidade**
    Ministrante: *Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki - UFSCAR*

    Resumo: Nessa palestra farei uma breve incursão no Problema de Brezis e Nirenberg, abordando os problemas críticos.[1] . Em seguida tratarei os problemas de Henon, onde são estudados os problemas supercriticos [3] e também o problemas super- supercriticos baseados no artigo [2], e finalmente para as soluções nodais o mesmo será inspirado em [4].

    Público: Acessível para alunos de graduação

Referências

[1] H. Brézis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure App. Math., Vol. 36, 437-477, (1983).

[2] J. M. do Ó, B. Ruf, P. Ubilla, On supercritical Sobolev type inequalities and related elliptic equations, Calc. Var., Vol. 55, Art. 83, 18 pp., (2016).

[3] W. Ni, A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications, Indiana Univ. Math. J., Vol. 31, No. 6, 801 - 807, (1982).

[4] D.M. Cao, S.G. Li, Z.G. Liu, Nodal solutions for a supercritical semilinear problem with variable exponent, Calc. Var., Vol. 57, Art. 38, 19 pp., (2018).

14. Título: **Ordens de crescimento e entropia generalizada**
    Ministrante: *Prof. Dr. Javier Alexis Correa Mayobre - UFMG*

Resumo: Com Enrique Pujals introduzimos neste trabalho o conceito de entropia generalizada. Este objeto é útil para estudar aqueles sistemas dinâmicos com entropia 0. A ideia e ver a definição, entender como classificar sistemas dinâmicos utilizando entropia generalizada e ver exemplos. Em particular, como se aplica a teoria ao espaço de cascadas cilíndricas.

15. Título: **Continuidade dos expoentes de Lyapunov para cociclos localmente constantes**
    Ministrante: *Profa. Dra. Karina Daniela Marín - UFMG*

    Resumo: Nesta palestra apresentaremos resultados sobre a continuidade dos expoentes de Lyapunov na topologia Hölder para cociclos localmente constantes com valores em SL(2,R) definidos sobre um shift de Bernoulli. Este é um trabalho em conjunto com Catalina Freijo.

Anexo III - Resumos dos Pôsteres

Apresentações no dia 04/03/2020

Aplicações da Topologia na Análise

Tomaz, C. S.[a] e **Alves, M. da S.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. carolina.tomaz@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. malves@ufv.br

O poster a ser apresentado é a segunda parte do projeto de Iniciação Científica *Aplicações de Álgebra Linear, Topologia e Análise*, que tem como proposta estudar relações entre tópicos de geometria analítica, álgebra linear, análise e topologia. Primeiramente, aplicando a geometria analítica e a álgebra linear no reconhecimento de cônicas e quádricas e, posteriormente, a análise matemática e a topologia dos espaços métricos no estudo da existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \\ &y(t_0) = y_0, \\ &y'(t_0) = y_1, \\ &\quad\vdots \\ &y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde y_i, $1 \leq i \leq n-1$, são números reais conhecidos, chamados de dados iniciais ou condições iniciais, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada e $y^{(m)}(t)$ denota a derivada de ordem m da função $y(t)$. Ao definirmos o que se entende por solução do problema de valor inicial (1), uma série de questões se coloca. Todo problema de valor inicial tem solução? Se tiver, ela é única? Há condições suficientes, impostas sobre a função $F(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$, para garantir que uma solução exista? E para que seja única?

Naturalmente, a melhor maneira de mostrar que o problema de valor inicial (1) tem solução é exibindo a solução, o que nem sempre é possível, pois muitas equações são difíceis, ou mesmo impossíveis, de se resolver de modo explícito. Saber a priori se um problema de valor inicial tem solução e se essa solução é única pode ser importante para justificar métodos de resolução. Para responder às perguntas anteriores, quanto à existência e (ou) unicidade de solução sem recorrer à forma particular das equações, serão apresentados dois importantes teoremas: o Teorema de Picard-Lindelöf e o Teorema de Peano. O primeiro será demonstrado usando como ferramenta o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o segundo, usando o Teorema de Arzelá-Ascoli, bem como argumentos da Análise.

Referências

[1] Elon L. Lima, Análise I, Editora da SBM, 2006.

[2] Elon L. Lima, Espaços Métricos, Editora da SBM, 1993.

[3] Claus I. Doering & Artur O. Lopes, Equações Diferenciais Ordinárias, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2005.

As Integrais de Riemann e Lebesgue

Moreira, B. W.[a] e **Melo Gurjão, J. L. F.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. bruno.wellington@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. jessycalange@gmail.com

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma definição alternativa de integração tomando como base a teoria da medida e integração de Lebesgue. Inicialmente, serão destacados algumas definições e teoremas que se fazem necessários para o cálculo das integrais de Lebesgue e, posteriormente, será estabelecida uma comparação entre esta e a Integral de Riemann, trazendo semelhanças, diferenças e vantagens desta nova definição.

Referências

[1] E.L. Lima. Análise Real, vol. 1. (Décima segunda edição) Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2017.

[2] E.L. Lima. Curso de Análise, vol. 1. (Sétima edição) Projeto Euclides, IMPA, 1976.

[3] G. de Barra. Measure Theory And Integration, Department of Mathematics Royal Holloway College, University of London, 1981.

Operadores de Transferência e algumas aplicações na Teoria Ergódica

Martins, N.[a] e **Mehdipour, P.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. neemias.martins@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. pouya@ufv.br

Os operadores de transferência codificam informações sobre o comportamento de sistemas dinâmicos e possuem aplicações em teoria ergódica, caos quântico e fractais. Neste trabalho, estudamos o operador Ruelle - Perron - Frobenius (RPF) e seu operador adjunto, o Koopman. Na teoria ergódica, assumindo um espaço de medida de probabilidade, eles podem fornecer informações úteis sobre as medidas invariantes do sistema, ergodicidade e propriedades como Mixing.

Referências

[1] LASOTA, A; MACKEY, M.C. *Chaos, Fractals and Noise:* Stochastic Aspects of Dynamics, Springer-Verlag New York Inc; v.97, 1994.

[2] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Foundations of ergodic theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1.ed, 2015.

Códigos de grupo gerados por Grupos de Coxeter

Souza, Frederico de Oliveira[a] e **Guerreiro, Marinês**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. frederico.o.souza@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. marines@ufv.br

A utilização de informações digitalizadas, como assistir televisão, falar ao telefone ou ouvir um CD mostram como os códigos corretores de erros participam do nosso cotidiano de inúmeras formas. Um código corretor de erros é, em essência, um modo organizado de acrescentar algum dado adicional a cada informação que se queira transmitir ou armazenar, que permita, ao recuperar a informação, detectar e corrigir erros. Essa teoria surgiu em 1948, com um trabalho do matemático C.E. Shanon do Laboratório Bell, a partir de um questionamento do porquê das máquinas não localizarem a posição de um erro e corrigi-lo numa transmissão de informações, uma vez que essas podiam detectar um erro. Nos últimos anos, percebeu-se que a utilização de mais estruturas algébricas nos códigos facilitou a determinação dos parâmetros de alguns códigos de modo mais eficiente, bem como a obtenção de novos algoritmos de codificação e decodificação. A partir de então começaram a ser estudados os chamados códigos de grupo. Um código de grupo C de comprimento n é uma órbita de um algum ponto inicial $x_o \in \mathbb{R}^n$ sob a ação de um grupo de isometrias $\mathcal{G}$ de um espaço Euclidiano n-dimensional. Seu estudo foi introduzido, em 1965, por Slepian e, desde então, códigos de grupo são muito estudados. A maior motivação para considerar esses códigos é sua estrutura natural com respeito ao canal de ruído Gaussiano aditivo (AWGN), nos quais os códigos de grupo têm as propriedades necessárias por terem regiões de decodificação de máxima verossimilhança (ML, da sigla em inglês para *maximum likelihood*) congruentes para todas as palavras do código, além de uma distribuição de distância que independe de palavra do código. Além disso, já se conhece um algoritmo de decodificação de ML simples para a subclasse de códigos de modulação permutacional, o que é importante para a aplicação prática dos códigos de grupos. Apresentamos aqui uma teoria básica de códigos corretores de erros e fazemos a construção de códigos gerados por grupos de Coxeter a partir da descrição de tais grupos, dada pelo sistema de raízes de cada um deles. A metodologia utilizada para o desenvolvimento do projeto que deu origem a este trabalho foi o estudo orientado de tópicos selecionados da bibliografia constante do projeto e discussão dos mesmos com a orientadora em seções semanais. Os resultados mais importantes abordados neste trabalho são descritos na forma dos teoremas principais que serão apresentados no pôster. A Teoria dos Códigos é um campo de investigação atual e muito ativo que envolve diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Ciência da Computação, Engenharia Elétrica e Estatística.

Referências

[1] A. Hefez, M.L.T Villela, *Códigos Corretores de Erros*, Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

[2] T. Mittelholzer, J. Lahtonen, *Group Codes Generated by Finite Reflection Groups*, IEEE Transactions on Information Theory, 42 (1996), 519-528.

[3] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical, 27 (1948), 379-423.

Máquinas de Vetores Suporte em Problemas de Regressão

Freitas, M. S. D.[a] e **Ignácio, L. F. F.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ. msdias@id.uff.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ. lucas_ignacio@id.uff.br

Neste trabalho estudamos o método de aprendizagem supervisionada desenvolvido por Vapnik denominado Máquina de Vetores Suporte (SVM) e testamos seu desempenho em problemas de regressão. Neste caso, o método é conhecido como Máquina de Vetores Suporte para Regressão (SVR). Fizemos um estudo com relação aos parâmetros do modelo que precisam ser ajustados e a dependência do método com relação a esses parâmetros. Além disso, comparamos o poder preditivo do método com o de outros modelos tradicionais, como regressão linear múltipla, aplicando o método a diferentes conjuntos de dados. Para realizar este estudo utilizamos a linguagem de programação Python.
Considere um conjunto de dados de treinamento $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_l, y_l)\} \subset \mathcal{X} \times \mathbb{R}$, onde $\mathcal{X}$ denota o espaço dos dados de entrada (por exemplo, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$). O objetivo do SVR é encontrar uma função $f(x)$ que se aproxime dos valores alvo y_i. O método é descrito com o uso de funções lineares f da forma:

$$f(x) = \langle w, x \rangle + b,$$

onde $w \in \mathcal{X}, b \in \mathbb{R}$.
O método se baseia na teoria de aprendizado estatístico e busca minimizar o risco empírico, isto é,

$$R_{emp}[f] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} c(x_i, y_i, f(x_i)) \tag{2}$$

onde $c(x, y, f(x))$ é a função que explicita o erro de predição, ou função de perda.
Assim, busca-se obter o minimizador do risco empírico $f_0 := \text{argmin}_{f \in \mathcal{H}} R_{emp}[f]$. Entretanto, pela teoria Vapnik-Chervonenkis (VC) (Vapnik, 1995) deve-se restringir o conjunto das funções das quais f pode ser escolhido para um que tenha uma *capacidade* adequada para a quantidade de dados de treino disponível. Tal teoria

fornece uma cota para o erro nos dados teste. A minimização dessas cotas, a qual depende do risco empírico e da capacidade da classe de funções, leva ao princípio da minimização do risco estrutural. No caso do SVR, temos o funcional de risco regularizado:

$$R_{reg}[f] = R_{emp}[f] + \frac{\lambda}{2}||w||^2, \tag{3}$$

onde $\lambda > 0$ é chamada de constante de regularização.
O conhecimento da teoria de aprendizado estatístico juntamente com a teoria de otimização nos permite compreender o método de máquinas de suporte vetorial (SVM), pois treinar SVM consiste em minimizar (3) resultando em um problema de otimização quadrática cuja solução é sempre única e global.
Corte e Vapnik utilizaram uma função custo chamada função de perda ϵ-insensível. Essa função ignora erros que estejam dentro de uma certa distância ϵ do valor verdadeiro. Isso foi possível com a introdução de variáveis de folga ξ no problema de otimização. Com isso, permite-se um equilíbrio entre a topologia da SVM (risco estrutural) e o erro de treinamento (risco empírico).
Assim, temos o seguinte problema de otimização (chamado problema primal) e a função de custo ϵ-insensível:

$$\begin{aligned} \underset{w \in \mathcal{H}, \xi \in \mathbb{R}^m}{\text{minimizar}} \quad & \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{m}(\xi_i + \xi_i^*) \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} y_i - \langle w, x_i \rangle - b & \leqslant \epsilon + \xi_i \\ \langle w, x_i \rangle + b - y_i & \leqslant \epsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* & \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad | \xi |_\epsilon := \begin{cases} 0, & \text{se } | \xi | \leqslant \epsilon \\ | \xi | - \epsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nessa formulação é utilizada uma constante $C > 0$ para controlar o quanto de desvio deve ser tolerado e esse parâmetro precisa ser ajustado.
Para resolver o problema, é preciso reescrevê-lo na sua forma dual e para resolução de problemas não-lineares são introduzidas funções que mapeiam o conjunto de treinamento em um espaço linearmente separável. O teorema de Cover afirma que um problema não-linear tem maior probabilidade de ser linearmente separável, em um espaço de mais alta dimensionalidade. A partir disso, o SVR realiza uma mudança de dimensionalidade, por meio das funções Kernel, podendo fazer uso do hiperplano ótimo. Assim, é preciso escolher qual função Kernel utilizar e definir os parâmetros dessa função.
Ao trabalhar com SVR, consegue-se uma representação esparsa da solução já que a solução depende apenas de um subconjunto dos dados de entrada referidos como vetores de suporte. Durante o estudo, pode-se analisar o efeito dos parâmetros a serem ajustados e o ótimo desempenho frente a métodos tradicionais em tarefas de regressão.

Referências

[1] F. Pedregosa; G. Varoquaux; A. Gramfort; V. Michel; B. Thirion; O. Grisel; M. Blondel; P. Prettenhofer; R. Weiss; V. Dubourg; J. Vanderplas; A. Passos; D. Cournapeau; M. Brucher; M. Perrot; E. Duchesnay, *Scikit-learn: Machine Learning in Python*, Journal of Machine Learning Research, 12 (2011), 2825-2830.

[2] B. Scholkopf; A. Smola, *Learning with kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*, MIT Press, 2002.

[3] A. J. Smola; B. Scholkopf, *A Tutorial on Support Vector Regression*, Statistics and Computing, 14 (2003), 199-222.

[4] V. N. Vapnik, *Estimation of Dependences Based on Empirical Data*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[5] V. N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer-Verlag New York, Inc, 1995.

Apresentações no dia 05/03/2020

Corpos Finitos

Costa, L. A. S.[a] e **Moriya, B. K. S.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. luana.a.costa@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. bhavinkumar.moriya@ufv.br

Neste trabalho será apresentado o conceito de corpo finito e algumas de suas propriedades. O corpo é uma estrutura algébrica, obtida de um conjunto munido das operações de soma e multiplicação de tal forma que estas sejam associativas, comutativas, possuam elemento neutro aditivo (0) e multiplicativo (1), além disso, todo elemento do corpo possui oposto aditivo, todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo e a multiplicação é distributiva com relação à adição. Quando o corpo possui um número finito de elementos, diremos que este é um corpo finito. Estudaremos que a quantidade de elementos em um corpo finito sempre é dada pela potência de um número primo. Além disso, estabeleceremos relações entre corpos e subcorpos. Este trabalho apresentará conceitos sobre extensão de corpos, funções e polinômios sobre corpos finitos, entre outros.

Referências

[1] MULLEN, Gary L.; MUMMERT, Carl. Finite Fields and Applications. Student Mathematical Library: American Mathematical Society, 2007.

[2] LIDL, Rudolf; NIEDERREITER, Harald. Finite Fields. 2. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 1983.

Representações de Grupos

Guerreiro, M.[a] e **Mussolin, D. O.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. marines@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. diovana.mussolin@ufv.br

Grupos são estruturas algébricas que aparecem em quase todas as áreas de Matemática e têm muitas conexões com Teoria de Números, Combinatória, Geometria, Topologia e Lógica. A Teoria de Grupos começou com Galois (1811-1832) que demonstrou que podemos entender polinômios de forma melhor, examinando certos grupos de permutações de suas raízes. No entanto, permutações foram objeto de estudo muito antes dessa época. Neste trabalho, o objetivo principal é o estudo da Teoria de Representações de Grupos. Uma representação de um grupo G é um homomorfismo de G para $GL(n, F)$, com $GL(n, F)$ o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis com elementos no corpo F. Na Teoria de Representações, dado um grupo G, queremos identificar G com um subgrupo de $GL(n, F)$, através de um homomorfismo de G para $GL(n, F)$. Após termos feito esta identificação, desejamos encontrar informações sobre a estrutura do grupo G analisando o subgrupo de matrizes encontrado. Dentre os diversos resultados obtidos, se destacam o Teorema de Maschke, que nos permite decompor um módulo completamente, o que é útil para obtermos representações de um grupo e também o Lema de Schur, que é um resultado básico sobre módulos irredutíveis e fundamental na Teoria de Representações de Grupos. Esta teoria tem muitas aplicações na Mecânica de Fluídos e estudos de partículas na Física, bem como no estudo de simetrias.

Referências

[1] G. James, M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press,1993.

[2] A. Golçalves, *Introdução à Álgebra*, SBM, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro,1979.

Convergência de Variáveis Aleatórias e Lei dos Grandes Números

Freitas, M. S. D.[a] e **Sant'Anna, M. G.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ. msdias@id.uff.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ. mateussant@id.uff.br

Neste trabalho estamos interessados no comportamento de algumas quantidades amostrais conforme o tamanho da amostra tende ao infinito. Em particular, estudamos o comportamento da média amostral $\overline{X_n}$ de n observações conforme $n \to \infty$.
Considere um experimento básico com a variável aleatória (VA) X representando o valor de um característico numérico do resultado. Suponha que o experimento seja repetido n vezes (n grande), de tal maneira que as realizações sejam independentes.
Suponha ainda que depois de cada "ensaio" do experimento registre-se o valor do característico numérico do resultado; chame este valor um observado. Esses n observados formam uma amostra aleatória da VA X. Se X é uma VA com média μ e variância σ^2 e obtemos uma amostra aleatória $X_1, ..., X_n$ de X, então

$$E\overline{X} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}nEX_1 = \mu.$$

$$Var\overline{X} = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}nVarX_1 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ou seja, a média amostral é um estimador não viesado e consistente da média populacional μ. Em outras palavras, o valor esperado da média amostral é μ e a variância tende a 0 conforme o número de termos n na soma aumenta.
Por sua vez, a Lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos n valores observados é aproximadamente igual a EX quando n é grande; de fato, ela afirma que esta média aritmética das observações converge, em certo sentido, para a média EX, quando n tende ao infinito. Logo, a Lei dos Grandes Números diz que:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to EX_1.$$

A pergunta que devemos responder é: de que tipo é a convergência afirmada pela Lei dos Grandes Números? Responder a essa pergunta é o objetivo deste trabalho. Existem dois tipos de convergência a considerar: convergência em probabilidade e convergência quase certa. A primeira fornece a Lei Fraca dos Grandes Números e a segunda, a Lei Forte dos Grandes Números.

Referências

[1] H. Bolfarine; M. Sandoval, *Introdução à Inferência Estatística*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[2] G. Casella; R. L. Berger, *Statistical Inference*, 2nd ed., Thomson Learning, 2002.

[3] M. H. DeGroot; M. J. Schervish, *Probability and statistics*, 3rd ed., Boston: Addison-Wesley Pub., 2002.

[4] S. Ross, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 4th ed., Elsevier, 2009.

Sistemas de EDOs e Biologia: uma introdução à Biomatemática

Cardoso, R. A.[a], **Martins, E. M.**[b] e **Ferreira, W. M.**[c]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. rodolfoa.amb@gmail.com
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG. eder@ufop.edu.br
[c] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG. wendersonmf@gmail.com

Neste trabalho propôs-se estudar a teoria dos Sistemas de Equações Diferenciais e sua aplicabilidade em biomatemática, uma crescente área da matemática aplicada. Para tal, realizou-se uma pesquisa sobre Pontos Fixos e provado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, como consequência deste o Teorema da Existência e Unicidade (Picard-Lindëlof) também foi demonstrado. A partir desta teoria, investigou-se os resultados mais triviais de Sistemas Autônomos, os Lineares Homogêneos, que dividem-se em quatro casos diferentes. Verificou-se suas características em cada caso, como: comportamento espacial (curvas), estabilidade, instabilidade e, exibindo um isomorfismo entre os espaços de soluções destes sistemas com plano cartesiano (usando o Teorema da Existência e Unicidade), implicando em que esse conjunto é um Espaço Vetorial. Verificou-se os resultados obtidos sobre sistemas de EDOs de uma forma equivalente e mais geral, abordando os Sistemas de Equações Diferenciais Lineares que não são autônomos. Conclui-se também que todo sistema autônomo pode ser linearizado sendo necessário somente conhecer as suas soluções de equilíbrio.
Partindo da teoria estudada, aborda-se uma aplicação dos sistemas autônomos, o modelo matemático de uma colônia de bactérias cultivadas em um Quimiostato. Notou-se que a modelagem de um problema biológico não é algo trivial e que espera-se de seus resultados mais precisão à medida em que o modelo se torna mais complexo, com a adição de ferramentas matemáticas e estatísticas.

Referências

[1] William E Boyce and Richard C DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (9a edição)*, LTC. 2010.

[2] Claus Ivo Doering and Artur O Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias; Coleção Matemática Universitária*, IMPA, 2008.

[3] Leah Edelstein-Keshet, *EMathematical Models in Biology*, SIAM, 2005.

[4] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley New York, 1989.

[5] Djairo G Figueiredo and Aloisio F Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas (3a Edição); Coleção Matemática Universitária*, IMPA, 2015.

[6] Elon Lages Lima, *Espaços Métricos (5a edição); Projeto Euclídes*, IMPA, 2015.

[7] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, (14a Ediçao); Projeto Euclídes*, volume 1 e 2. IMPA, 2017.

Espaços de Sobolev na Reta e Aplicações

MORAES, G.[a] e **TEIXEIRA, E. J.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. gabriela.moraes@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. edson.teixeira@ufv.br

O desenvolver do aprendizado dos Espaços de Sobolev na Reta deu-se início neste trabalho com o estudo de tópicos de Teoria de Medida. Primeiramente, apresentamos definições de medida e a partir daí foram construídas ferramentas culminando na teoria de integração e obtenção de inequações, muito úteis na obtenção de estimativas.

Em seguida, ainda com o intuito de construir uma base para o estudo dos Espaços de Sobolev, foram trabalhadas noções de Análise Funcional.

Posteriormente, foi estudado o conceito de derivada fraca, que nos permite definir os espaços de Sobolev que é um espaço mais amplo que engloba uma classe maior de funções que não necessariamente possuem derivadas no sentido clássico, que são estudadas em cursos de cálculo.

Conhecendo os Espaços de Sobolev, podemos procurar soluções, no sentido fraco, de alguns problemas de valor inicial, sem a exigência de que a solução procurada seja clássica. É neste ponto que trabalhamos as aplicações do conteúdo estudado. Os dados iniciais também fazem parte destes espaços de derivada fraca. A unicidade de solução também é obtida sob certas condições.

Referências

[1] Bartle, R. G., *The elements of integration*, John Wiley & Sons, 1966.

[2] Bartle, R. G., *The elements of integration*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[3] Brezis, H., *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*, Alianza, 1983.

[4] Carvalho, V. J. A., *Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais.* Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[5] Kreyszig, E., *Introductory Funcional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[6] Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

Apresentações no dia 06/03/2020

Dinâmica Populacional: Modelo de Espécie Única Modelo Presa-Predador

Igor Nahan, M.S.[a]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. igor.nahan@gmail.com

Neste trabalho, são explorados conceitos de dinâmica populacional e a aplicabilidade de álgebra linear nesta área. Primeiramente, há uma exposição sobre modelos de espécie única, com foco no paradigma de crescimento exponencial. Em seguida, discute-se sobre modelos presa-predador e a necessidade de álgebra linear neste assunto.

Referências

[1] S. T. Oliveira, *Estabilidade de pontos de equilíbrio e existência de soluções periódicas em alguns modelos bidimensionais*, Rio Claro: [s.n.], 2015.

[2] H. Weissl, *An Mathematical Introduction to Population Dynamics*, 2010.

[3] H. Anton, C. Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*, 8. ed, Porto Alegre: Bookman, 2001.

Sobre a Conjectura de Goldbach em Anéis de Polinômios

Michele, C. G.[a]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. michele.cordeiro@ufv.br

Será que existem estruturas diferentes de $\mathbb{Z}$ nas quais alguma variação da Conjectura de Goldbach é válida?
Em 1965, [1], Hayes demonstrou que cada polinômio de $\mathbb{Z}[x]$ de grau $n \geq 1$ é uma soma de 2 polinômios irredutíveis de $\mathbb{Z}[x]$ de grau n. Já em 2011, [2], Pollack investigou se o teorema de Hayes era válido para anéis de polinômios $R[x]$ mais gerais. O objetivo deste trabalho é apresentar seus resultados.

Referências

[1] D. R. Hayes. *A Goldbach theorem for polynomials with integral coeficients*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 45-46.

[2] P. Pollack. *On Polynomial rings with a Goldbach property.* Amer. Math. Monthly, 118 (2011) 71-77.

Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Ramalho, L.[a] e **Junior, A. C.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. leandro.ramalho@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. ady.cambraia@ufv.br

Um dos problemas interessantes na área de geometria diferencial de subvariedades é a análise, caracterização e obtenção de superfícies, que possuem uma propriedade geométrica pré-estabelecida em variedades produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ (onde $\mathbb{M}$ denota uma variedade bidimensional). Neste pôster apresentamos o teorema de classificação das superfícies que fazem um ângulo constante com alguma direção pré-fixada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Referências

[1] Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, In: Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.

[2] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática, 5ªed. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[3] Dillen, F. and Munteanu, M.I., *Constant Angle Surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$,arXiv:0705.3744v1 [math. DG] (2007) to appear in Bull. Braz. Math. Soc., (2009).

[4] Dillen, F. and Fastenakels, J. and Van der Veken, J. and Vrancken, L., *Constant Angle Surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Monaths. Math 152 (2), 89-96 (2007)

[5] Munteanu, M. I. and Nistor, A. I., *Constant Angle Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Turk J. Math. 33, 169-178 (2009)

[6] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* vol. 1, Publish or Perish, Houston, Texas, (1999).

Controle Ótimo de um Foguete

Vieira, D. J.[a] e **de Araujo, A. L. A.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. davivieiramat@gmail.com
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. anderson.araujo@ufv.br

Trabalhamos com o problema de maximizar a altitude de um foguete a partir de seu lançamento vertical até o instante em que seu combustível acaba, incluindo a dedução da equação do movimento do foguete. A referência [1] trata de um caso especial do problema em que são desprezados a força de resistência do ar, assim como a variação da aceleração gravitacional, além de considerar constante a taxa de queima de combustível, ou seja:

$$\dot{\mu} = c$$

na Equação de Movimento do Foguete:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{u\dot{\mu}(t)}{M_0 - \mu(t)} - \frac{GM_T}{\left(R_T + y(t)\right)^2} - \frac{\lambda \dot{y}^2(t)}{M_0 - \mu(t)}. \tag{4}$$

Essa simplificação do problema torna possível a resolução da equação envolvida aplicando ferramentas básicas do Cálculo Diferencial e Integral.
Como parte do nosso trabalho, além do estudo do modelo apresentado em [1], abordamos também a situação em que a taxa de queima de combustível varia linearmente em relação ao tempo , ou seja:

$$\dot{\mu} = ct.$$

Referências

[1] L. S. FASSARELLA, M. S. ARAÚJO, A. S. GAZZOLI, *Controle Ótimo de um Foguete*, PORANDU, Vol. 1, n. 1, (2015)78–86.

[2] R. J. SANTOS, *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2013.

Múltiplas soluções para uma classe de problemas elípticos

Barreira, J. C. F.[a] e **Melo Gurjão, J. L. F.**[b]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. joao.barreira@ufv.br
[b] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG. jessyca@ufv.br

Neste trabalho apresentaremos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, \ x \in \Omega, \\ u(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_μ}$$

em que Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e μ um parâmetro positivo. Seguindo Azorero & Alonso [2], [3] e Alves & Ding [1], mostraremos a existência de, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais para o problema (P_μ).

Referências

[1] C. O. Alves,; Y. H. Ding, *Multiplicity of Positive Solutions to a p-Laplacian Equation Involving Critical Nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 279 (2003), 508-521.

[2] J. Garcia Azorero,; I. Peral Alonzo, *Existence and Non-uniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear Eigenvalues.* Coom. Partial Differential Equations 12,(1987) 1389-1430.

[3] J. Garcia Azorero,; I. Peral Alonzo, *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent with a Nonsymmetric Term.* Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 877-895.