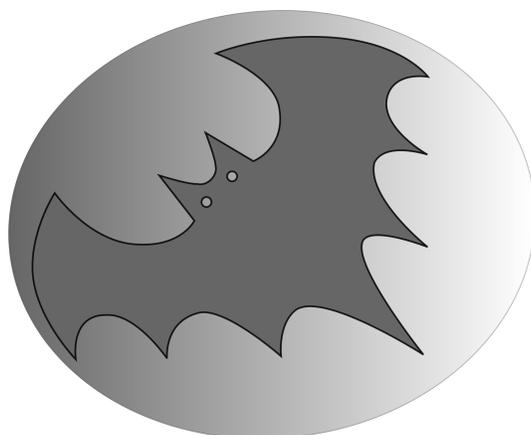


XIII PROGRAMA DE VERÃO EM MATEMÁTICA - UFV



Aplicações entre superfícies fechadas

CATARINA MENDES DE JESUS SÁNCHEZ

DMA UFV

Março/2020

1 Introdução

Um dos principais problemas em Matemática consiste em classificar objetos de estudo. Dependendo das propriedades de interesse deste objeto se define uma classe de equivalência. Em geral, uma pergunta clássica é: *dois objetos dados são equivalentes ou não?* O nosso objeto de estudo são as aplicações estáveis entre superfícies que tem interessado a vários autores como ([21, 23, 24, 25]). Trataremos especificamente de grafos associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano, introduzido em [12] com objetivo de contribuir com as classificações destas aplicações. Os grafos servem como invariante topológico destas aplicações e como ferramenta útil para a construção das mesmas. A palavra estável quer dizer que podemos garantir o comportamento de uma aplicação mesmo com “pequenas perturbações”. Em geral, o primeiro contato de um estudante com as singularidades ocorre nos estudos de funções reais a uma variável, num curso de Cálculo I, quando descreve a função a partir de seus pontos críticos onde a primeira derivada se anula. Em muitos casos podemos chamar estes pontos críticos (máximo ou mínimo) de pontos de dobra.

O estudo sobre estes grafos foi estendido para aplicações estáveis entre superfícies fechadas, no caso geral, ([5, 7, 8, 13]), para aplicações de Gauss de superfícies fechadas imersas no 3-espaço ([14, 19]) e aplicações de 3-variedades no 3-espaço ([9, 15]). Localmente, as aplicações entre superfícies podem ser vistas como aplicações do plano no plano e as singularidades ocorrem nos pontos em que a matriz Jacobiana (formada pelas derivadas parciais de primeira ordem) não tem posto máximo. Em (1955), Whitney [25] iniciou o estudo das aplicações estáveis do plano no plano, quando determinou que um germe de aplicação em cada ponto (análise local) é equivalente a um ponto *regular*, ou ponto de *dobra* ou uma *cúspide*. Também determinou que o conjunto das aplicações estáveis formam um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as aplicações suaves. No final dos anos 70, Thom [23] notou que esses resultados poderiam ser incorporados a uma nova teoria: a *Teoria das Singularidades*.

No caso global de aplicações estáveis entre superfícies, se a superfície domínio é fechada, o conjunto singular consiste de uma coleção de curvas fechadas, simples e disjuntas, que separa o conjunto regular em componentes conexas disjuntas desta superfície. Em geral, na Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis são utilizadas técnicas de Geometria Diferencial, Análise e Álgebra para estudar o comportamento (local, semi-global e global) das singularidades, enquanto que no estudo de grafos associados às aplicações estáveis entre superfícies, em geral, as técnicas estão mais relacionadas com a Topologia como, por exemplo, a própria construção do grafo, a relação entre as transições de codimensão e as alterações no grafo [5, 21], a característica de Euler entre o grafo e a superfície domínio e as cirurgias de aplicações estáveis introduzidas em [7, 13].

Nestas notas, escritas para o minicurso do **XIII Programa de Verão em Matemática - UFV 2020**, abordamos sobre o estudo de grafos associados às aplicações estáveis entre duas superfícies fechadas. O principal objetivo é mostrar como os grafos podem auxiliar na construção de uma aplicação com o conjunto singular pré-determinado. As descrições feitas aqui sobre grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas podem ser vistas com detalhe nas seguintes referências [5, 7, 8].

2 Constructing fold maps with prefixed graphs

2.1 Fold maps com contorno aparente nao planar

Introduziremos aqui alguns conceitos básicos sobre grafos que podem ser vistos em [10] e em teoria dos grafos. Os conceitos específicos sobre grafos para o objetivo deste trabalho, podem ser encontrados em [5, 7]. Para melhores informações sobre topologia e superfícies veja Lima [4], Kinsey [10], Massey [11] e Munkres [20].

3 Grafos

Definição 3.1. Um **grafo** finito $G(V, A)$ é formado por um conjunto $\{u_1, \dots, u_V\}$, de V pontos chamados de **vértices** e um conjunto com A traços de curvas chamados de arestas, onde cada traço conecta um par de vértices de V .

Definição 3.2. Um **caminho** sobre um grafo $G(V, A)$ é uma sequência de vértices distintos e arestas distintas $v_1 a_1 v_2 a_2 \dots e_k v_{k+1}$, onde a_j é incidente aos vértices v_j e v_{j+1} .

O **comprimento** de um caminho entre dois vértices no grafo é dado pelo número de arestas ao longo de um caminho que vai de um dos vértices até o outro.

Se $v_1 = v_{k+1}$, esta sequência será chamada de **ciclo** sobre o grafo $G(V, A)$.

Definição 3.3. O grafo $G(V, A)$ é **conexo** se existe um caminho que liga quaisquer dois de seus vértices.

Se $G(V, A)$ é não conexo, cada subgrafo conexo será chamado de componente conexa de $G(V, A)$.

Sempre existe um caminho que conecta dois vértices quaisquer de uma mesma componente conexa de G .

Definição 3.4. Uma **árvore** é um grafo conexo que não tem ciclos.

Observe que toda árvore com V vértices tem $A = V - 1$ arestas. Isto pode ser verificado facilmente por indução sobre o número de vértices.

Definição 3.5. Dois vértices de um grafo são **adjacentes** se estão conectados por uma aresta.

Uma aresta que conecta os dois vértices u e v será denotada por uv .

Definição 3.6. O número de arestas conectadas a um vértice u é chamado **grau** de u e será denotado por $deg(u)$.

Se $deg(u) = 1$, então u será dito **vértice extremo**. A única aresta de um vértice extremo será dita **aresta extrema**.

Definição 3.7. Uma árvore com V vértices e $V - 1$ vértices extremos será chamado de grafo **estrela**.

Notação: Dado um grafo $G(V, A)$ vamos denotar o **número de vértices** por $|V|$ ou mesmo por V e o **número de arestas** por $|A|$ ou A .

Definição 3.8. o número de **ciclos livres** de um dado grafo com V vértices é o número mínimo de aresta que podem ser retirada do grafo para obter uma árvore com os V vértices.

Teorema 3.9. *O número de ciclos (livres) do grafo $G(V, A)$ é dado por $\beta_1(G) = A - (V - 1)$.*

Chamaremos simplesmente **ciclos** o número $\beta_1(G)$, que é também conhecido como o primeiro **número de Betti** do grafo.

Teorema 3.10. [10] *A característica de Euler de um grafo $G(V, A)$ é dado por $\chi(G) = V - A = 1 - \beta_1(G)$.*

Consequentemente, toda árvore tem característica de Euler igual a 1.

Teorema 3.11. [10] *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

Definição 3.12. Um grafo $G(V, A)$ é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais \pm a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que $G(V, A)$ é **não-bipartido**.

Teorema 3.13. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui nenhum ciclo ímpar. Caso contrário, se o grafo tem um ciclo ímpar, ele é não-bipartido. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.*

4 Cirurgias de grafos

Um grafo \mathcal{G} conexo ou não conexo pode ser obtido de outro grafo por cirurgia entre duas arestas, chamadas de cirurgia horizontal, ou cirurgia entre dois vértices, chamada de cirurgia vertical.

Seja \mathcal{G} um grafo com pesos nos vértices contendo as arestas uv e yz .

1. *Cirurgia Horizontal de Grafos (S_H):* Uma cirurgia horizontal entre as arestas uv e xz , denotado por $S_H(\mathcal{G})$, identifica as duas arestas resultando na aresta rs , identifica os vértices u e x , resultando no vértice r , e os vértices v e z , resultando no vértice s , sendo que os pesos nos vértices r e s corresponde, respectivamente, a soma do peso de u com o peso de x e a soma do peso de v com o peso de z .
2. *Cirurgia Vertical de Grafos (S_V):* Uma cirurgia vertical entre os vértices u e z , denotado por $S_V(\mathcal{G})$, é a conexão dos dois vértices por uma aresta uz .

Definição 4.1. Sejam \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 dois grafos conexos disjuntos. Se o par de vértices (u, v) pertence a \mathcal{G}_1 e o par (x, z) pertence a \mathcal{G}_2 , a cirurgia horizontal entre os dois grafos será chamada de **soma conexa horizontal**, denotada por $\mathcal{G}_1 \oplus_H \mathcal{G}_2$, e a cirurgia vertical será chamada de **soma conexa vertical**, denotada por $\mathcal{G}_1 \oplus_V \mathcal{G}_2$.

Definição 4.2. Uma árvore será chamada de **grafo básico** se tem todos os vértices com grau máximo igual a 2, denotada por L_A , onde A indica o número de arestas.

Proposição 4.3. *Toda árvore que pode ser obtida por um número finito de somas conexas horizontais de grafos tipo L_3 satisfaz $V^+ = V^-$.*

Demonstração. Todo grafo L_3 satisfaz $V^+ = V^- = 2$. Naturalmente um conjunto com k grafos L_3 satisfaz $V^+ = V^- = 2k$. Se \mathcal{T} é obtido por $k - 1$ somas conexas horizontais entre os k grafos L_3 , em cada cirurgia são identificados dois pares de vértices com sinais opostos, subtraindo um vértice com cada sinal. Consequentemente \mathcal{T} satisfaz $V^+ = V^- = 2k - (k - 1) = k + 1$. \square

Lema 4.4. *Toda árvore com $A > 2$ arestas pode ser obtida por somas conexas horizontais de grafos tipo L_2 e L_3 .*

Demonstração. Dado uma árvore \mathcal{T} com A arestas, se $A = 2$ então \mathcal{T} é um L_2 . Se $A = 3$ então \mathcal{T} é um L_3 ou um grafo estrela e em ambos os casos \mathcal{T} pode ser obtido como soma conexa horizontal de dois grafos L_2 .

Suponhamos agora que \mathcal{T} tem $A - 1 > 2$ arestas. Vamos usar o princípio de indução sobre A . Seja v um vértice extremo (com única aresta) de \mathcal{T} conectado a w pela aresta vw .

Eliminando a aresta vw de \mathcal{T} com o vértice extremo v , obtemos uma árvore L com $A - 1$ aresta e $w \in L$. Suponha, por hipótese de indução, que L pode ser obtida por $A - 3$ somas horizontais de $k - 1$ grafos L_2 .

Fazendo uma soma horizontal de L_2 com L , com a identificação de $w \in L$ com o vértice de grau 2 em L_2 , obtemos o grafo \mathcal{T} com A , como soma conexa de $A - 1$ grafos L_2 . \square

Teorema 4.5. *Todo grafo \mathcal{G} pode ser obtido por somas conexas horizontais de grafos tipo L_2 e L_3 e cirurgias verticais.*

Demonstração. Dado o grafo \mathcal{G} , retirando uma aresta de cada um de seus ciclos obtemos uma árvore maximal \mathcal{T} . Pelo Lema 4.4 toda árvore \mathcal{T} pode ser obtida por somas conexas horizontais de grafos tipo L_2 e L_3 . O grafo \mathcal{G} pode ser obtido por cirurgias verticais convenientes sobre \mathcal{T} . \square

5 Topologia de Whitney

Veremos de forma bem reduzida a definição da Topologia de Whitney, mas antes veremos algumas definições de Topologia.

Definição 5.1. Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:

- 1- Os subconjuntos \emptyset e X estão em τ .
- 2- A união de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ .
- 3- A interseção finita de qualquer subcoleção de τ está em τ .

Se X é um conjunto e τ é uma topologia definida sobre X , chama-se **espaço topológico** ao par (X, τ) . Os subconjuntos de X que pertencem à coleção τ são chamados de conjuntos **abertos**.

Definição 5.2. Um subconjunto F de um espaço topológico X é chamado de **fechado** se o conjunto $X \setminus F$ é aberto.

Definição 5.3. Seja S subconjunto do espaço topológico X . O **interior** de S é definido como a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em S e denotado por $int(S)$. O **fecho** de S , no espaço topológico X , é definido como a intersecção de todos os subconjuntos fechados de X que contém S e denotado por \overline{S} .

Note que (i) S é aberto se, e somente se, $S = int(S)$.
(ii) S é fechado se, e somente se, $S = \overline{S}$.

Definição 5.4. O **bordo** ou **fronteira** de S é o conjunto $\overline{S} \setminus int(S)$.

Definição 5.5. Um espaço X é chamado de **espaço de Hausdorff** quando, dados dois pontos diferentes x e y em X , existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Definição 5.6. Uma coleção \mathcal{C} de subconjuntos de um espaço X é chamada de cobertura de X , se a união de elementos de \mathcal{C} é igual a X . O conjunto \mathcal{C} é chamada de **cobertura aberta (fechada)** de X se seus elementos são subconjuntos abertos (fechados) de X .

Definição 5.7. Um espaço X é chamado de **compacto** se qualquer cobertura aberta \mathcal{C} de X contém uma subcobertura finita que também cobre X .

Definição 5.8. Sejam (X, τ) e (Y, δ) espaços topológicos. A aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é **contínua** em $x \in X$ se para qualquer aberto V contendo $f(x)$ existe aberto U contendo x tal que $f(U) \subset V$.

Ou seja, a aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é **contínua** se, e somente se, para todo aberto U em Y a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

Observe que a continuidade depende não só de f mas também das topologias de X e Y .

Definição 5.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação de um conjunto arbitrário X num espaço topológico Y . A coleção τ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos abertos $A \subset Y$ pela aplicação f é uma topologia em X chamada **topologia induzida**.

A aplicação f da topologia induzida é contínua, pois a imagem inversa de cada aberto de Y é aberta em X .

Sejam (X, τ) espaço topológico, Y um conjunto não vazio e $p : X \longrightarrow Y$ sobrejetiva. Definimos em Y a seguinte topologia:

$$\tau_p = \{V \subset Y / f^{-1}(V) \in \tau\}.$$

Pode verificar que τ_p é uma topologia sobre Y .

Definição 5.10. τ_p é dita topologia quociente em Y induzida por p .

Definição 5.11. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é um **homeomorfismo** se, e somente se f é uma bijeção contínua com a inversa contínua.

Definição 5.12. Dados conjuntos $X \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, chama-se **extensão** de f a U a qualquer aplicação $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Definição 5.13. Dados $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **suave** se para cada $p \in X$ existir um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo p e uma extensão de classe C^∞ de $f : X \cap U \rightarrow Y$ a U .

Definição 5.14. Quando $f : X \rightarrow Y$ é diferenciável (suave), bijetiva e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também diferenciável dizemos que f é um **difeomorfismo**. Dois conjuntos $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, dizem-se **difeomorfos** se existir um difeomorfismo $f : X \rightarrow Y$.

Definição 5.15. Uma **variedade topológica** de dimensão m é um espaço topológico M com as seguintes propriedades:

1. M é Hausdorff: dados dois pontos distintos p e q em M , existem abertos disjuntos U, V tais que $p \in U$ e $q \in V$;
2. M tem base enumerável de abertos: existe uma coleção enumerável de abertos de M tal que todo aberto é a união de abertos dessa coleção;
3. M é localmente Euclidiano: para quaisquer $p \in M$, existem abertos $U \subset M$ contendo p , $V \subset \mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$.

Definição 5.16. Uma **variedade diferenciável**, de classe C^k , é um par (M, \oplus) , onde M é uma variedade topológica e \oplus é uma estrutura diferenciável, de classe C^k .

Definição 5.17. Sejam X uma variedade topológica n -dimensional e V_i um aberto de \mathbb{R}^n , com $i \in I$ um conjunto de índices. Dizemos que X é **diferenciável de classe C^k** , $0 < k \leq \infty$, se é um conjunto junto com uma família de aplicações biunívocas $\phi_i : U_i \subset X \rightarrow V_i$, chamadas **carta local** (ou sistema de coordenadas local), tal que U_i é um aberto de \mathbb{R}^n . Os domínios das cartas recobrem X , isto é, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Definição 5.18. Quando M e N são de classe C^∞ , a **topologia C^∞ de Whitney** em $C^\infty(M, N)$ é definida como a união das topologias induzidas pela inclusão $C^\infty(M, N) \rightarrow C^r(M, N)$, $1 \leq r < \infty$ (ver [2])

6 Superfícies

Uma **superfície** M , sem bordo é um espaço topológico de Hausdorff, que em cada ponto $p \in S$ tem uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto.

Definição 6.1. Uma superfície M será dita **fechada** se é compacta e não tem bordo.

A esfera S^2 e o toro T^2 são superfícies sem bordo. O disco fechado D^2 , tem uma componente de bordo e o cilindro limitado é uma superfície com duas componente de bordos.

Na geometria de superfícies estuda-se aspectos ou medidas que se alteram com as deformações como: distâncias; áreas; ângulos e curvaturas. Na topologia de superfícies já se estuda o conjunto

de propriedades que não se alteram com deformações como: esticar, encolher e entortar a superfície, ou parte dela. Outra propriedade que não altera é cortar a superfície de forma suave e depois colar uma na outra pelas bordas produzidas pelo corte.

Definição 6.2. Duas superfícies S e M são **homeomorfas** ou **topologicamente equivalente** se existe um homeomorfismo entre elas. Em outras palavras, dizemos que duas superfícies são homeomorfas se uma pode ser transformada na outra através das deformações citadas acima, que não alteram as propriedades topológicas das superfícies.

Definição 6.3. Uma superfície M é dita **orientável** se não contém uma faixa de Moebius. Caso contrário, M é **não-orientável**.

Definição 6.4. A **soma conexa** de duas superfícies M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$, é a nova superfície obtida pela remoção de um pequeno disco em M_1 e um em M_2 e a identificação dos bordos.

Topologicamente, a esfera S^2 é o elemento neutro da soma conexa de superfícies.

Definição 6.5. Dada uma superfície compacta orientável $M \cong S^2 \# nT$ o número n é dito **gênero** de M , que corresponde o número de alças da superfícies.

Analogamente, dada uma superfície não orientável $M \cong S^2 \# pP^2$ o número p é dito **gênero** de M , que corresponde o número de faixas de Moebius contida na superfície, também pode ser denotado por $g(M)$.

Teorema 6.6. (*Teorema da Classificação das Superfícies*) *Toda superfície M , compacta é homeomorfa a soma conexa de n -toros e p -planos projetivos com a esfera, isto é:*

$$M \cong S^2 \# nT^2 \# pP^2$$

para algum $n \geq 0$ e $p \geq 0$.

Observe que se $M \cong S^2 \# pP^2$ então podemos escrever

$$M = \begin{cases} nT^2 + P^2, & \text{se } p = 2n + 1, \\ nT^2 + K, & \text{se } p = 2n + 2. \end{cases}$$

Teorema 6.7. *Seja M uma superfície com gênero $g(M)$ e k componentes de bordo. A característica de Euler de M é dado por*

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 - 2g(M) - k, & \text{se } M \text{ é orientada,} \\ 2 - g(M) - k, & \text{se } M \text{ é não orientada.} \end{cases}$$

Corolário 6.8. *Se M_1 e M_2 são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

A característica de Euler da soma conexa de duas superfícies, M_1 e M_2 , é dada por

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Observação 6.9. *A característica de Euler de superfícies é um invariante completo, ou seja, se M_1 e M_2 são duas superfícies conexas e fechadas então M_1 é topologicamente equivalente a M_2 se, e somente se, $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ e ambas são orientáveis ou ambas são não-orientáveis.*

7 Grafos e superfícies fechadas com curvas

Sejam M uma superfície fechada (sem bordo) e orientada e $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^A \alpha_i$ um conjunto com A curvas fechadas, simples e disjuntas sobre M . O conjunto \mathcal{C} separa M em um conjunto de V regiões conexas, isto é, $M \setminus \mathcal{C}$, é uma união disjunta de regiões conexas de M . Podemos associar um grafo \mathcal{G} ao par (M, \mathcal{C}) da seguinte forma:

- a) cada região conexa U_i de $M \setminus \mathcal{C}$ fazemos corresponder a um vértice v_i em \mathcal{G} e cada curva α_j de \mathcal{C} fazemos corresponder uma aresta e_j em \mathcal{G} ;
- b) uma aresta e_j incide no vértice v_i se, e somente se, a curva de \mathcal{C} correspondente a e_j está no bordo da região $M \setminus \mathcal{C}$ correspondente a v_i ;
- c) um ciclo com única aresta, chamado de laço, ocorre quando a curva correspondente é bordo (duas vezes) de uma única região;
- d) um vértice v_i recebe o peso t_i se a região regular correspondente a v_i tem gênero t_i (soma de t_i toros com buracos).

Definição 7.1. Dois pares (M, \mathcal{C}) e (M', \mathcal{C}') são ditos **equivalentes** quando existe um difeomorfismo de M em M' que leva \mathcal{C} em \mathcal{C}' .

Observação 7.2. Se (M, \mathcal{C}) e (M', \mathcal{C}') são equivalentes, então existe um isomorfismo entre os seus respectivos grafos associados.

Proposição 7.3. Todo grafo \mathcal{G} com característica $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ está associado a um par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto com A componentes de curvas fechadas mergulhadas e disjuntas sobre M .

Demonstração. Dado um grafo \mathcal{G} podemos obter o par (M, \mathcal{C}) associado a \mathcal{G} da seguinte forma: Primeiro, mergulhe o grafo \mathcal{G} em \mathbb{R}^3 e tome uma região (conveniente), que denotaremos por R , vizinhança de \mathcal{G} em \mathbb{R}^3 . Denotamos por Z a superfície fechada bordo de R , que é conhecida como vizinhança tubular de \mathcal{G} . Observe que o gênero de Z é igual a $\beta_1(\mathcal{G})$. Faça corresponder a cada aresta a_i de \mathcal{G} , uma curva fechada α_i em Z , transversal à aresta a_i . Denotamos por \mathcal{G} o conjunto destas curvas. O par (Z, \mathcal{G}) corresponde ao grafo \mathcal{G} com peso zero. Para realizar o grafo \mathcal{G} com os pesos, façamos em cada uma das região Z_i de Z , correspondente ao vértice v_i com peso $t_i > 0$, uma soma conexa de uma superfície fechada W_i com gênero t_i com Z . Esta soma conexa resultante numa superfície orientada e fechada M , onde o par (M, \mathcal{C}) realiza o grafo \mathcal{G} . \square

Proposição 7.4. Se \mathcal{G} é um grafo com característica $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ associado ao par (M, \mathcal{C}) , onde M é uma superfície orientada. Então a característica de Euler de M (em função de $C(\mathcal{G})$) é dado por

$$\chi(M) = 2(V - A - W)$$

e o gênero é dado por

$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W.$$

Demonstração. A característica de Euler de cada componente conexa U_i de $M \setminus \mathcal{C}$ é dada por $\chi(U_i) = 2 - 2t_i - A_i$, onde t_i e A_i correspondem, respectivamente, ao gênero e ao número de componentes de bordos de U_i . Como cada componente de \mathcal{C} é bordo de duas componentes de $M \setminus \mathcal{C}$ então o número total de componentes do bordo da união das componentes U_i é igual a $2A$. A interseção entre duas componentes é sempre uma curva fechada ou conjunto vazio e tem característica de Euler igual a zero. Logo

$$\chi(M) = \chi(\cup_{i=1}^V U_i) = \sum_{i=1}^V \chi(U_i) = \sum_{i=1}^V (2 - 2t_i - A_i) = 2(V - W - A).$$

O gênero de uma superfície orientada M é dado por $g(M) = 1 - \frac{\chi(M)}{2} = 1 - (V - W - A)$. Como $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + A$ então $g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W$. \square

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades de Aplicações Estáveis entre Superfícies e o leitor interessado pode aprofundar no assunto consultando por exemplo: Gibson [1], Golubitsky-Guillemin [2], Lima [3], Ohmoto-Aicardi [21] e Vassiliev [24].

8 Aplicações estáveis

Sejam M e N duas superfícies suaves e $\mathcal{F}(M, N)$ o conjunto de todas as aplicações entre M e N . Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ o conjunto de todas aplicações suaves $f \in \mathcal{F}(M, N)$.

Definição 8.1. Duas aplicações $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ são ditas **\mathcal{A} -equivalentes** quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ e $\psi : N \rightarrow N$, tais que $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, f e g são \mathcal{A} -equivalentes se o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

Definição 8.2. Uma aplicação $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ é dita **estável** se existe uma vizinhança aberta W_f de f em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ (com a topologia \mathcal{C}^∞ de Whitney) tal que cada h em W_f é \mathcal{A} -equivalente a f .

O conjunto das aplicações estáveis de $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, denotado por $\mathcal{E}(M, N)$, é também chamada de aplicação **1-genérica**.

Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Se M é compacta e f é imersão, submersão ou difeomorfismo local (esses três conceitos coincidem, pois $\dim M = \dim N$) então f é estável [2]. Em particular, se f é difeomorfismo então f é estável.

Teorema 8.3. [25] O conjunto $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Definição 8.4. Duas aplicações $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$ são ditas **estavelmente isotópicas** se existe uma aplicação suave (estável) $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que para cada $t \in [0, 1]$, a aplicação em que $F_t = F|_{M \times \{t\}}$ é estável, com $F_0 = f$ e $F_1 = h$.

Observação 8.5. Dizer que f e h são estavelmente isotópicas é equivalente a dizer que f e h se encontram na mesma componente conexa de $\mathcal{E}(M, N)$, pois uma isotopia estável define um caminho entre as aplicações f e h onde todas as aplicações ao longo deste caminho são estáveis.

As aplicações a) e c) Figura 1 não são \mathcal{A} -equivalentes, ou seja, não são isotopicamente estáveis, pois qualquer caminho entre as duas passa por uma aplicação não estável (tangência). Então as duas aplicações estão em diferentes componentes conexas de $\mathcal{E}(M, N)$.

Definição 8.6. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ uma aplicação estável. Um ponto x em M é dito **ponto regular** de f se, numa vizinhança do ponto x , a aplicação f é um difeomorfismo local, caso contrário, dizemos que x é um ponto **singular** de f .

Em outras palavras, um ponto singular de f é um ponto $p \in M$ tal que o posto da aplicação linear df_p é menor que 2 (dimensão de N).

Definição 8.7. O conjunto de todos os pontos singulares de f , denotado por Σf , é chamado de **conjunto singular** de f .

A imagem do conjunto singular, denotado por Bf , é chamado de **contorno aparente**.

O conjunto de todos os pontos não singulares de f , denotado por $M \setminus \Sigma f$, é chamado de **conjunto regular** de f .

A Figura 1 ilustra imagens de três aplicações de S^2 em \mathbb{R}^2 com uma curva singular. Observe que em b) a aplicação é não estável com um um ponto de tangência no contorno aparente, pois uma pequena perturbação na aplicação em b) na vizinhança deste ponto o contorno aparente da nova aplicação pode passar a ter dois pontos na intersecção como em c) ou não ter ponto de intersecção como a). Se $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é uma aplicação estável:

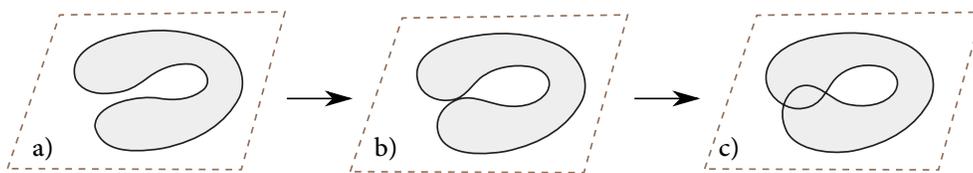


Figura 1: Exemplo de contorno aparente de aplicação do S^2 em \mathbb{R}^2 .

1. O conjunto singular Σf está formado por um **conjunto de curvas** simples disjuntas e mergulhadas (suaves e sem auto intersecção) no domínio de f (subvariedade de codimensão 1), podendo ter pontos de cúspides isolados.
2. O conjunto Σf separa o conjunto regular $M \setminus \Sigma f$ em componentes conexas que são imersas por f sobre a imagem.

- O contorno aparente $Bf = f(\Sigma f)$ é formado por um conjunto de **curvas suaves** na imagem de f , podendo ter **pontos duplos** (formados por interseções transversas de imagens de duas curvas de dobras) e cúspides isoladas (veja Figura 3).

Se duas aplicações f e g são \mathcal{A} -equivalentes, os conjuntos singulares Σf e Σg são \mathcal{A} -equivalentes e os contornos aparentes Bf e Bg são \mathcal{A} -equivalentes. Assim, duas aplicações que não conjuntos singulares \mathcal{A} -equivalentes ou contornos aparentes \mathcal{A} -equivalentes não são \mathcal{A} -equivalentes.

9 Singularidades de aplicações estáveis

Segundo Whitney [25], as aplicações entre duas superfícies, localmente podem ser vistas como aplicações do plano no plano. Antes estudar as aplicações entre superfícies, veremos os tipos de singularidades do plano no plano. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável e $p = (x, y)$ um

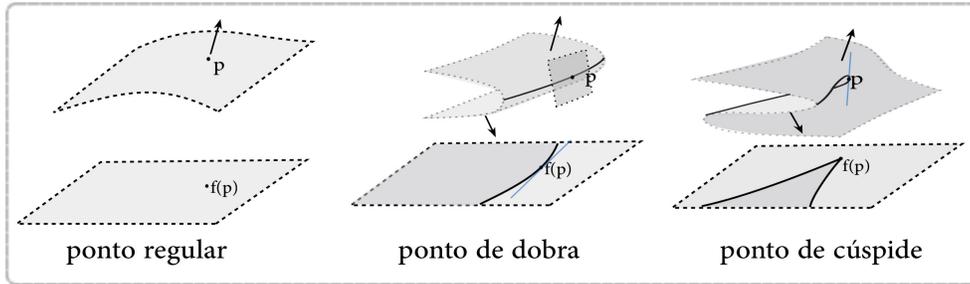


Figura 2: Singularidades estáveis do plano no plano.

ponto de U . Então ocorre uma das seguintes situações:

- p é ponto **regular** se $(df)_p$ é isomorfismo. Nesse caso, localmente, f é da forma $(x, y) \mapsto (x, y)$.
- p é ponto **singular** de f do tipo:
 - Dobra**, se $T_p\Sigma(f) \oplus \text{Ker}(df)_p = T_pU$.
Nesse caso, podemos escolher um sistema de coordenadas (x, y) em \mathbb{R}^2 centrada em p tal que $(x, y) \mapsto (x, y^2)$.
 - Cúspide**, se $T_p\Sigma(f) = \text{Ker}(df)_p$. Nesse caso, podemos encontrar coordenadas (x, y) centradas em p tais que localmente f é da forma $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$.

Observação 9.1. Se p é ponto de dobra então a aplicação derivada $(df)_p$ leva o plano tangente T_pU na reta tangente ao contorno aparente de f , em $f(p)$. Por outro lado, se p é um ponto de cúspide então $(df)_p$ leva a reta tangente a Σf , em p , no ponto $f(p)$.

A Figura 3 ilustra uma sequência com sete diferentes aplicações da esfera no plano ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves $\mathcal{C}^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$. As aplicações a), c), e e) são estáveis (com diferentes números de curvas singulares) e as aplicações b) e d) são não estáveis. Em b)

o contorno aparente tem duas componente conexas, uma com único ponto singular e outro uma curva fechada. Por uma pequena perturbação o ponto singular isolado passa a uma curva singular ou pode desaparecer. Em d) o contorno aparente tem um ponto de tangência entre dois arcos da mesma curva. Por uma pequena perturbação na aplicação estas curvas podem ser separadas em duas componentes conexas sem cúspides com mesmo sinal, como em e), ou unidas em uma só curva com duas cúspides de mesmo sinal, como em c).

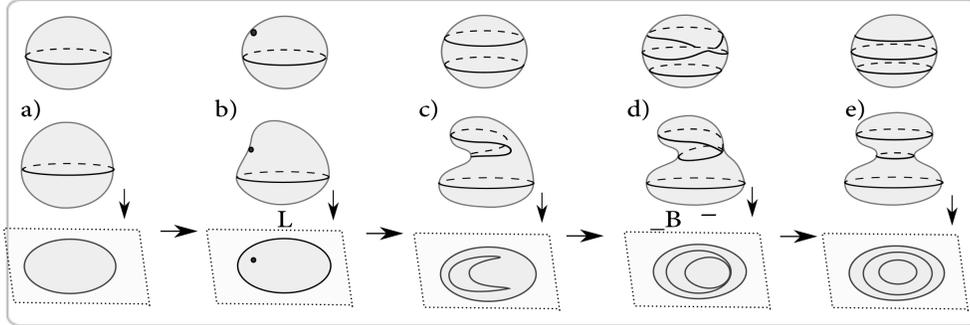


Figura 3: Sequência de aplicações em $\mathcal{C}^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$.

10 Aplicações de codimensão 1 e 2

Considere uma homotopia $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ entre duas aplicações estáveis $f, g : M \rightarrow N$ no conjunto $\mathcal{E}(M, N) \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$. À medida em que t varia no intervalo $[0, 1]$ o contorno aparente de $F_0 = f$ é deformado no contorno aparente de $F_1 = g$. Pode acontecer que ao longo do caminho entre f e g , para algum $t_0 \in (0, 1)$ a aplicação F_{t_0} não é estável. Neste caso, os contornos aparentes de f e g não são equivalentes e o mesmo pode ocorrer com os conjuntos singulares (ver Figura 3).

Definição 10.1. O conjunto das aplicações não estáveis $\mathcal{C}^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$, complementar do conjunto das aplicações estáveis em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, é chamado de conjunto **discriminante** e será denotado por \mathcal{D} (ver [2]).

O conjunto discriminante \mathcal{D} pode ser visto como “paredes” (de dimensão infinita) formadas pelas aplicações de codimensão 1 e nas intersecções destas paredes estão as aplicações de codimensões maiores que 1. \mathcal{D} separa $\mathcal{E}(M, N)$ em componentes conexas (por caminho) disjuntas em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

A Tabela 1 apresenta as formas locais a 1-paramêtro (na vizinhança de zero), de aplicações de 1-germe, 2-germes e 3-germes, ilustradas na Figura 4 (ver [21]). Cada transição está representada localmente por uma sequência de três aplicações em $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^2)$. As aplicações do centro, pertence ao conjunto \mathcal{D} , são não estáveis de codimensão 1 para $a = 0$ e estáveis para $a \neq 0$. Estas sequências são chamadas de **transições de codimensão 1**.

Em outras palavras, uma transição de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ é uma aplicação de codimensão 1 que está na intersecção do conjunto discriminante \mathcal{D} (com um caminho (família a 1-parâmetro) que conecta duas aplicações f e g em diferentes componentes diferentes de $\mathcal{E}(M, N)$). A Figura 3 ilustra cinco diferentes aplicações da esfera no plano, onde a aplicação b) e d) são transições de codimensão 1 que alteram o número de componentes singulares e o número de

Tipo	Nome	Forma normal
1) L	lábios	$(x, y^3 + y(x^2 - a))$
2) B	bicos	$(x, y^3 - y(x^2 - a))$
3) S	rabo de andorinha	$(x, y^4 + xy - ay^2)$
4) DD^0	tangências de dobras	$(x, -y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
5) DD^1	tangência de dobras	$(x, y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
6) DD^2	tangências de dobras	$(x, +y^2 + a), (x', x'^2 - y'^2)$
7) PT^0	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (-x''^2, y'')$
8) PT^1	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (x''^2, y'')$
9) CD^1	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (y'^2 - a, x')$
10) CD^2	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (-y'^2 - a, x')$

Tabela 1: Estratos de codimensão 1 em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

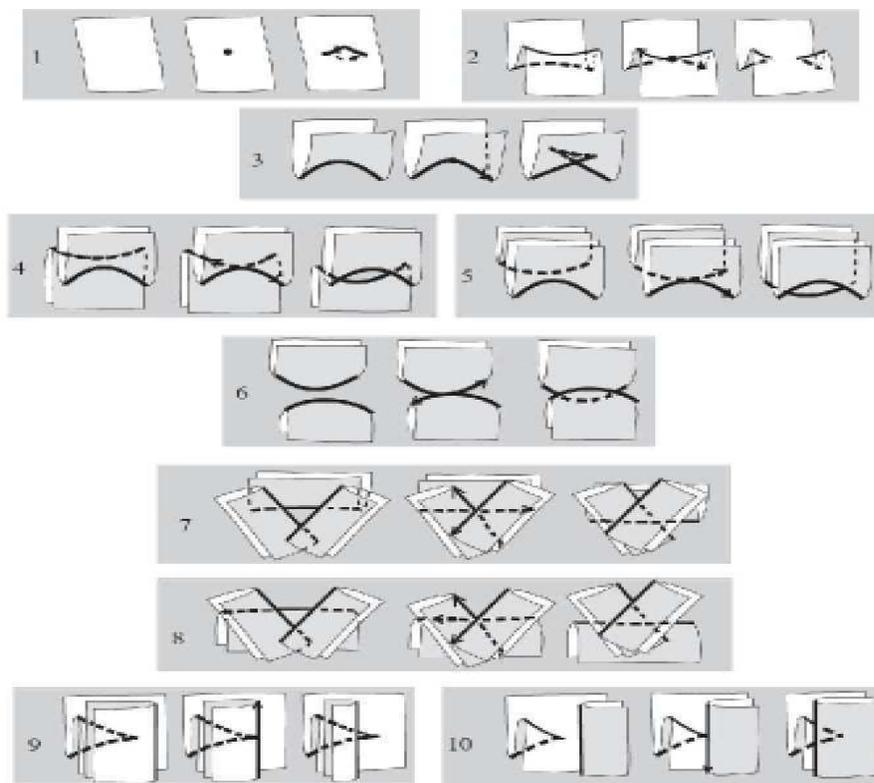


Figura 4: Transições de codimensão 1 em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

cúspides. A Figura 5 ilustra o contorno aparente de três diferentes aplicações do toro no plano. A aplicação do centro pode ser obtida da aplicação da esquerda por duas transições rabo de andorinha S e a aplicação da direita pode ser obtida da aplicação do centro passando por uma transição bicos, no sentido que diminui o número de cúspides.

Teorema 10.2. [23] *Sejam M e N superfícies fechadas. Se M é orientada e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, então o número de cúspides do contorno aparente Bf é par.*

As classes de homotopia de $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ são conexas por caminhos, logo existe um caminho $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa \mathcal{D} passando somente por aplicações de codimensão 1. Isto mostra que o Teorema 10.2 é bastante natural, pois se M é orientada sempre é possível ligar uma aplicação estável qualquer a uma aplicação dobra (sem cúspide) passando pelo discriminante somente através das transições de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Todas as transições de codimensão 1 alteram o total das cúspides sempre por um número par (ver Figura 4).

11 Efeitos das transições de codimensão 1

As transições que alteram o número de componentes singulares e regulares são (L) , chamada de transição **lábios**, (B) , a transição **bicos**. As transições que alteram o número de cúspides são (L) , (B) e a transição **rabo de andorinha** (S) . As transições que alteram o número de pontos duplos são (S) , (T^i) , $i = 1, 2$, **tangência entre duas dobras**, e (TC^i) , $i = 1, 2$, **tangência de uma dobra com uma cúspide**. Considerando caminhos positivo, como na Figura 4, da esquerda

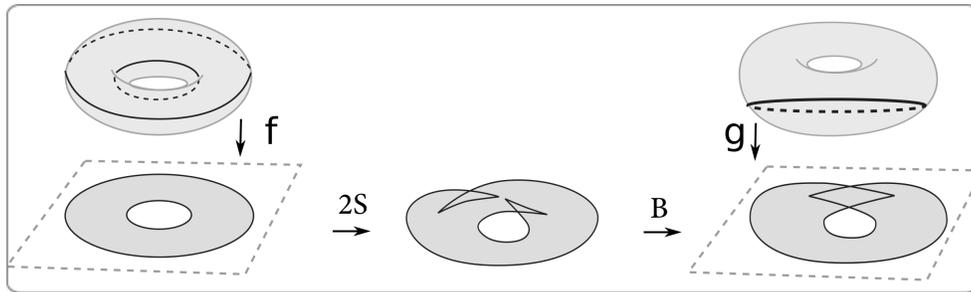


Figura 5: Transição S e B altera o número de cúspides e o gênero.

para a direita no sentido que aumenta o número de cúspides ou pontos duplos, as transições de codimensão 1 alteram as novas aplicações estáveis da seguinte forma:

1. Transição *Lábios* L (veja Figura 6): dentro de uma região regular U , nasce uma nova curva singular com duas novas cúspides com mesmo sinal, apontando para a mesma região regular. Consequentemente, o número de pontos de cúspides é aumentado por 2, o número de componentes singulares e regulares é aumentado por 1 (veja Figura 3).
2. Transição *Bicos* B^+ , B e B^- (Figura 6): na região regular Z , tangenciam dois arcos de curvas singulares criando duas novas cúspides com mesmo sinal, onde a transição B^+ aumenta o

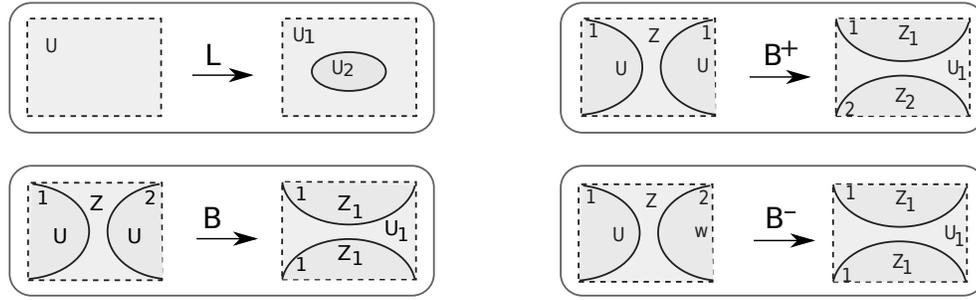


Figura 6: Efeito das transições labios e bicos.

número de componentes regulares e de componentes singulares por 1 (veja Figura 3), a transição B diminui o número de componente singular por 1 e aumenta o gênero por 1 (veja Figura 5) e B^- diminui por 1 o número de componentes singulares e de componentes regulares (veja Figura 3).

3. Transição *Rabo de Andorinha* S : sobre um arco de curva de dobras nasce dois pontos de cúspides, com sinais opostos, e um ponto duplo. S altera somente o número de pontos duplos por $+1$.
4. Transição *Tangência entre duas curvas de dobras* DD^i , $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos por $+2$.
5. Transição *Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra* CD^i , $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos por $+2$.
6. Transição *Pontos Triplos* PT^i , $i = 1, 2, 3$: passagem por um ponto triplo formado pela interseção de três curvas de dobras. Não altera o conjunto singular nem o regular.

12 Grafos de aplicações estáveis entre superfícies

Sejam M e N duas superfícies fechadas e orientadas e $f \in \mathcal{E}^\infty(M, N)$, conjunto das aplicações estáveis entre M e N . O conjunto singular Σf está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas que separa as regiões regulares de $M \setminus \Sigma f$, (complemento do conjunto singular) em componentes conexas.

Naturalmente, podemos associar ao par $(M, \Sigma f)$ um grafo com pesos nos vértices, onde cada curva α de Σf corresponde a uma aresta a , cada região regular U corresponde a um vértice v , que recebe como peso t o gênero de U (soma de t toro). Está claro que a incide no vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular correspondente a v .

Definição 12.1. O grafo \mathcal{G} associado ao par $(M, \Sigma f)$, onde $f \in \mathcal{E}^\infty(M, N)$, é chamado de **grafo dual** de f .

Observação 12.2. O grafo dual é um invariante de aplicações estáveis. De fato, no grafo está codificado as informações do conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies e consegue separar algumas aplicações com mesmo contorno aparente como ilustra a Figura 7.

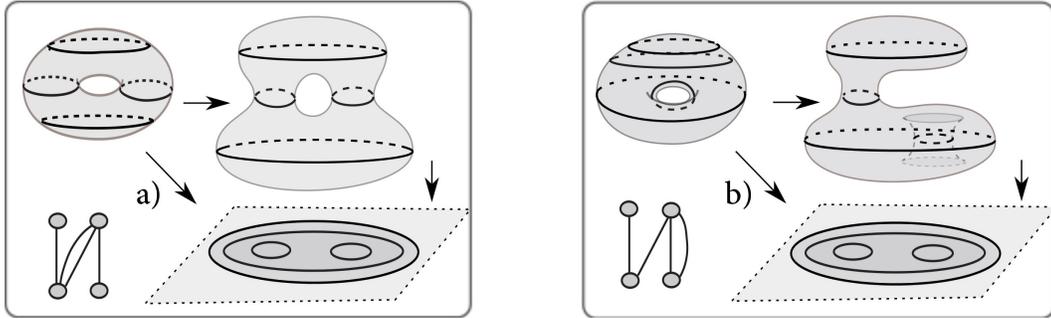


Figura 7: Aplicações toro no plano com $A = 4$.

Observe que cada aplicação estável está associada a um grafo e cada grafo pode ser associada a uma classe de diferentes aplicações com pares (M, \mathcal{C}) equivalentes, onde \mathcal{C} corresponde o conjunto de curvas singulares.

Uma pergunta natural agora é: *Quais grafos com pesos inteiros positivos nos vértices estão associados às aplicações estáveis entre superfícies orientadas?* Aqui veremos respostas dependendo de N .

Definição 12.3. Sejam M e N superfícies orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável. Uma região regular U de $M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** se tem a orientação preservada por f e **negativa** em caso contrário.

Definição 12.4. O fecho de cada componente conexa regular de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por f será denotado por U_i^+ , enquanto o fecho de cada componente conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é invertida por f será denotado por U_j^- .

Denotaremos por $M^+ = \bigcup_i U_i^+$ e $M^- = \bigcup_j U_j^-$.

Assim, M^+ e M^- são superfícies compactas e com bordo. Além disso,

$$M = M^+ \cup M^- \quad \text{e} \quad \Sigma f = M^+ \cap M^-.$$

Definição 12.5. Dizemos que um ponto $x_k \in f^{-1}(y)$ é **positivo** se $x_k \in M^+$ ou **negativo** se $x_k \in M^-$.

Proposição 12.6. *O grafo dual de qualquer aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e orientadas é bipartido.*

Demonstração. Cada curva singular de Σf é bordo de uma componente de M^+ e de uma componente de M^- , conseqüentemente cada aresta do grafo associado a f conecta um vértice de $V^+(\mathcal{G})$ com um vértice de $V^-(\mathcal{G})$, criando uma bipartição no conjunto dos vértices. \square

Sejam \mathcal{G} um grafo bipartido associado a aplicação estável $f : M \rightarrow N$ e $M^\pm = \bigcup_{i=1}^{V^\pm} U_i^\pm$ a união das componentes regulares de f , com seus respectivos sinais. Aos vértices de \mathcal{G} correspondente às componentes regulares M^\pm associamos o sinal \pm . Denotamos por:

1. V^\pm o número de vértices de \mathcal{G} com sinais \pm , que corresponde o número de componentes de M^\pm .
2. $W^\pm = \sum_{j=1}^{V^\pm} t_j^\pm$, onde t_j^\pm é o peso do vértice v_j^\pm , que correspondente ao gênero da componente regular U_j^\pm .
3. A_j^\pm o número de arestas nos vértices v_j^\pm , que corresponde ao número de componentes de bordo de U_j^\pm .

Observe que $A = \sum_{j=1} A_j^+ = \sum_{j=1} A_j^-$.

Proposição 12.7. *Seja \mathcal{G} um grafo bipartido com característica $(V^+ + V^-, A, W^+ + W^-)$, associado a uma aplicação estável de M em N . A característica de Euler de M^\pm em função de \mathcal{G} é dado por $\chi(M^\pm) = 2V^\pm - 2W^\pm - A$.*

Demonstração. A característica de Euler da componente conexa U_i^\pm com A_i^\pm componentes de bordos satisfaz é dada por $\chi(U_i^\pm) = 2 - 2g(U_i^\pm) - A_i^\pm = 2 - 2t_i^\pm - A_i^\pm$, pelo Teorema 6.7. Pelo Corolário 6.8

$$\chi(M^\pm) = \sum_{i=1}^{V^\pm} \chi(U_i^\pm) = \sum_{i=1}^{V^\pm} (2 - 2t_i^\pm - A_i^\pm) = 2V^\pm - 2W^\pm - A,$$

pois as componentes de M^\pm são todas disjuntas. □

Corolário 12.8. $\chi(M) - 2\chi(M^-) = 2[(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)]$.

Demonstração. A superfície $M = M^+ \cup M^-$ e a inteseção entre componentes de M^+ e de M^- é sempre vazia ou uma curva simples. Pelo Corolário 6.8 $\chi(M^+ \cup M^-) = \chi(M^+) + \chi(M^-)$, pois $\chi(M^+ \cap M^-) = 0$. $\chi(M) - 2\chi(M^-) = \chi(M^+) - \chi(M^-) = 2[(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)]$, pela Proposição 12.7. □

13 O Teorema de Quine para grafos

O Teorema 13.6 foi demonstrado por Quine em [22]. Uma demonstração baseada na relação entre cúspides e conjuntos regulares foi apresentada em [13].

Definição 13.1. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **própria** se a imagem inversa de um compacto é um compacto.

Definição 13.2. Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . O **grau de f no ponto y** (grau local), indicado por $deg_y f$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

Teorema 13.3. [4] Toda aplicação $f : M \rightarrow N$, de classe C^2 , corresponde a um inteiro r , tal que para todo valor regular y de f , tem-se que $deg_y f = d$.

Definição 13.4. O número $d = deg_y f$ do Teorema 13.3 é o **grau da aplicação f** , ou simplesmente, $deg f$.

Se M e N são superfícies fechadas e orientadas uma homotopia entre duas aplicações estáveis, passando por qualquer transição em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, não altera o grau da aplicação. Então duas aplicações com diferentes graus não podem estar na mesma classe de homotopia e não são A -equivalentes. Assim, o grau é um invariante global natural das aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientada.

A Figura 8 ilustra três aplicações estáveis do 4-toro no 3-toro com grau zero com única curva singular sem pontos de cúspides. Observe na Figura 8 que duas aplicações com o mesmo grau

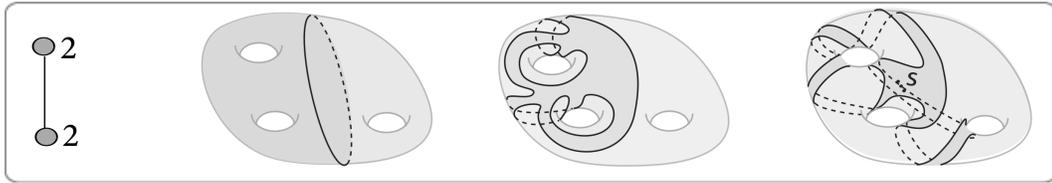


Figura 8: Aplicações de grau zero do 4-toro no 3-toro.

não está necessariamente na mesma classe de homotopia, pois uma não pode ser arrastada (por homotopia) até a outra, devido a forma que as alças do 4-toro enrola sobre as alças do 3-toro. A Figure 9 ilustra duas aplicações no toro: a) M é o toro, $d = 2$ e $A = 0$; em b) M é o bitoro, $d = 4$, $A = 1$ e $C = 4$. Esta aplicação pode ser obtida da aplicação da seguinte forma: primeiro, por uma transição lábios obtemos uma aplicação h do toro no toro com $d = 2$ e $A = 1$ e $s(C) = 2$. Da soma conexa de duas aplicações tipo h obtém-se a aplicação em b).

Observe que das aplicações a) e b) podemos obter outras aplicações com o mesmo conjunto singular e grau d qualquer.

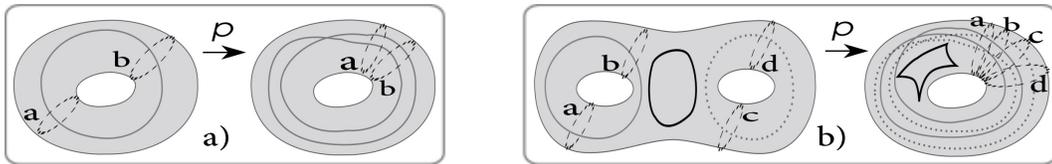


Figura 9: Aplicações no toro do: a) toro com grau 2; b) bitoro com grau 4.

Teorema 13.5. *Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação com grau d e com conjunto singular vazio. Então a característica de Euler de M e N satisfaz $\chi(M) = d\chi(N)$.*

Demonstração. Seja M uma superfície fechada e orientada $f : M \rightarrow N$ uma aplicação com grau d e com conjunto singular vazio. Podemos decompor M em d componentes conexas, $C_1, C_2, \dots, C_{d-1}, C_d$, que cobre N somente uma vez. Duas destas componentes, suponhamos C_1 e C_d , tem duas componentes de bordo. Então $\chi(C_1) = \chi(C_d) = 2 - 2(n - 1) - 2 = 2 - 2n$. As outras componentes C_2, \dots, C_{d-1} tem gênero $n - 2$ e 4 componentes de bordo. Então $\chi(C_2) = \chi(C_{d-1}) = 2 - 2(n - 2) - 4 = 2 - 2n$. Como a interseção das componentes são curvas fechadas com característica de Euler nula, então $\chi(M) = \chi(C_1 \cup \dots \cup C_d) = d(2 - 2n) = d\chi(N)$. \square

Teorema 13.6. (Teorema de Quine) Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre as duas superfícies fechadas e orientadas M e N . Se f tem grau d então e m pontos de cúspides

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + s(C) = d\chi(N),$$

onde χ denota a característica de Euler e $s(C)$ a soma total dos graus das cúspides.

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema de Quine.

Teorema 13.7. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre as duas superfícies fechadas e orientadas M e N . Se f tem grau d e m pontos de cúspides, então o grafo associado a f satisfaz

$$(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = d(1 - g(N)) - \frac{s(C)}{2}.$$

Consequentemente, $s(C)$ é sempre par.

Demonstração. A superfície N é fechada e orientada com $\chi(N) = 2 - 2g(N)$, onde $g(N)$ denota o gênero de N . Do Corolário 12.8 temos que

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) = 2[(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)].$$

Substituindo estas duas igualdades no Teorema de Quine obtemos a afirmação acima. \square

Corolário 13.8. O grafo de uma aplicação dobra (sem cúspides) $f : M \rightarrow N$ com grau d satisfaz $(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = d(1 - g(N))$. Consequentemente, se $N = \mathbb{R}^2$ então $V^+ - V^- = W^+ - W^-$.

14 Cirurgias de aplicações estáveis

Uma aplicação estável f pode ser obtida a partir de uma aplicação g conhecida, passando por transições (aplicações não estáveis) ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves. As

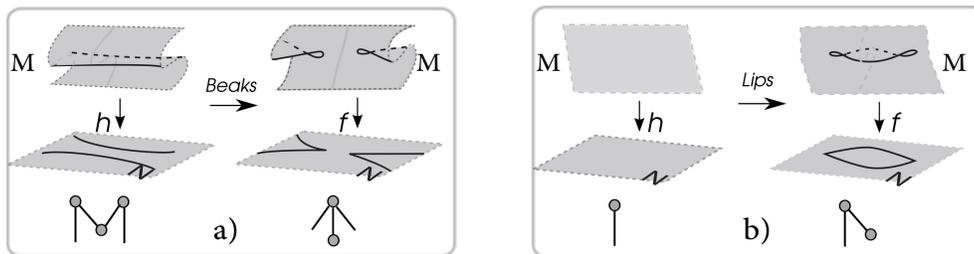


Figura 10: Singularidades estáveis do plano no plano.

transições bicos e lábios (veja no capítulo anterior) alteram o conjunto singular e consequentemente o grafo da aplicação (veja Figura 10), mas não alteram o grau da aplicação.

Para obter uma aplicação com um grau desejado, uma forma de construir estas aplicações é através de cirurgias de aplicações estáveis. Em particular, uma cirurgia sobre uma aplicação $h \in$

$\mathcal{E}^\infty(Z, N)$ é removido um par de discos disjuntos, D_1 e D_2 , da superfície M que é substituído por um tubo conectando os dois bordos $M \setminus D_1 \cup D_2$ menos os disco, onde estendemos a aplicação sobre o interior do tubo, resultando numa aplicação e $h_\beta \in \mathcal{E}^\infty(M, N)$, onde M é uma superfície fechada obtida pela cirurgia sobre Z . É claro que a cirurgia realizada nas aplicações induz naturalmente a cirurgia sobre os grafos associados. Veremos dois tipos de cirurgias (horizontal e vertical) de aplicações, relacionada com a cirurgia de grafos no primeiro capítulo, introduzida em [7].

Sejam $Z = Z_1 \cup Z_2$ e N duas superfícies orientadas e $h : Z \rightarrow N$ uma aplicação estável. Denotamos por h_1 a restrição de h a Z_1 e h_2 a restrição de h a Z_2 . Veremos a seguir como construir sobre h uma cirurgia de aplicação.

a) Cirurgia Horizontal S_H Uma cirurgia horizontal sobre a aplicação estável $h : Z \rightarrow N$ pode ser feita da seguinte forma (ver a) Figura 11):

1. Escolha dois arcos $l = h(l')$ e $j = h(j')$ em Bh , onde l' e j' são arcos de dobras em Σh e exista um caminho η entre l e j com $\eta \cap Bh = \emptyset$.
2. Mergulhe um retângulo β em $N \setminus Bh$, na vizinhança de η , onde dois lados opostos de β , complementares dos arcos opostos k e m em β , são identificados com os arcos l e j , respeitando a orientação de Bh , conectando os arcos l e j , como ilustra a Figura 11, chamado de **ponte** entre as curvas.
3. Escolha dois pequenos discos D_l e D_j em Z contendo os arcos de curva singular l e j e repasse a seus interiores por um tubo T , respeitando a orientação de Z , obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M (ver Figura 11).
4. Estenda a aplicação estável h sobre o tubo T , obtendo a aplicação h_β , de forma que h_β sobre T tenha dois arcos de curvas singulares k' e m' , com $h_\beta(k') = k$ e $h_\beta(m') = m$.

b) Cirurgias Vertical S_V Uma cirurgia vertical (ver b) Figura 11) sobre a aplicação estável $h : Z \rightarrow N$ pode ser feita da seguinte forma:

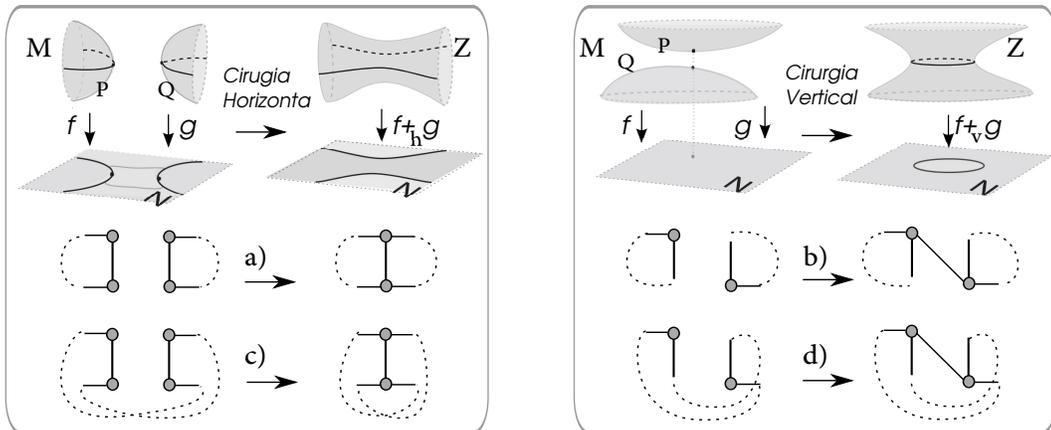


Figura 11: Cirurgia horizontal e grafos.

1. Escolha dois pontos $p, q \in Z \setminus \Sigma h$, tais que $p \in Z^+$ e $q \in Z^-$ e $h(p) = h(q) \in N \setminus Bh$.

2. Escolha dois pequenos discos D_p e D_q em Z vizinhança dos pontos p e q , respectivamente, e repasse a seus interiores por um tubo T , respeitando a orientação de Z , obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M .
3. Estenda a aplicação estável h sobre tubo T , de forma que sobre T tenha somente uma curva singular γ que é mergulhada por h_γ na vizinhança de Q em $N \setminus Bh$.
4. Estenda a aplicação estável h sobre o tubo T , obtendo a aplicação h_β , de forma que sobre T tenha dois arcos de curvas singulares k' e m' , com $h_\beta(k') = k$ e $h_\beta(m') = m$.

Definição 14.1. A cirurgia horizontal $h_\beta = h_1 \oplus_H h_2$ é chamada de **soma horizontal** das aplicações estáveis h_1 e h_2 e a cirurgia vertical $h_\gamma = h_1 \oplus_V h_2$ é chamada de **soma vertical** das aplicações estáveis h_1 e h_2 (ver Figura 12).

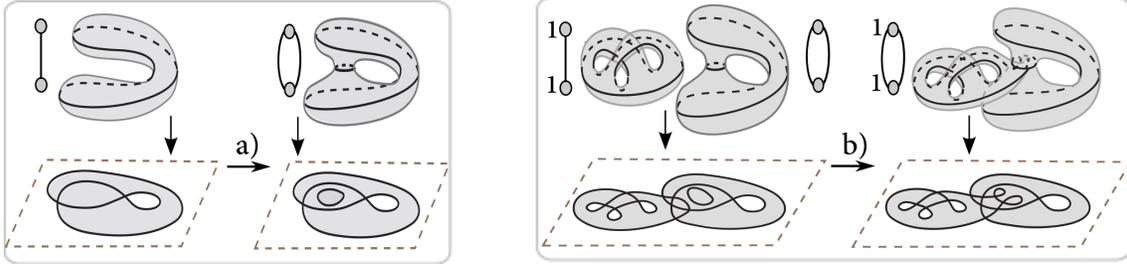


Figura 12: Exemplo de cirurgias: a) vertical; b) horizontal.

A Figura 12 ilustra dois exemplos de cirurgias. Em a) uma cirurgia vertical sobre uma aplicação da esfera no plano com $A = 1$, $V = 2$ e $W = 0$ obtendo uma aplicação do toro no plano com $A = 2$, $V = 2$ e $W = 0$; em b) uma cirurgia horizontal entre a aplicação do toro obtido em a) e uma aplicação do bitoro no plano com $A = 1$, $V = 2$ e $W = 2$, obtendo uma aplicação do 3-toros no plano com $A = 2$, $V = 2$ e $W = 2$.

Observação 14.2. Se \mathcal{G} é um grafo com característica $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ associado à aplicação estável $h : Z \rightarrow N$ então a característica do grafo resultante com a cirurgia horizontal é $C(S_H(\mathcal{G})) = (V - 2, A - 1, W)$, pois são identificados duas arestas e dois pares de vértices e com a cirurgia vertical é $C(S_V(\mathcal{G})) = (V, A + 1, W)$,

Pela construção das cirurgias de aplicações, podemos afirmar o seguinte:

Proposição 14.3. Se \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos associados, respectivamente, às aplicações estáveis $h_1 : Z_1 \rightarrow N$ e $h_2 : Z_2 \rightarrow N$ então os grafos resultantes das somas conexas de grafos $\mathcal{G}_1 \oplus_H \mathcal{G}_2$ (horizontal) e $\mathcal{G}_1 \oplus_V \mathcal{G}_2$ (vertical) é um grafo associado a aplicação estável $h_1 \oplus_H h_2$ e $h_1 \oplus_V h_2$, respectivamente.

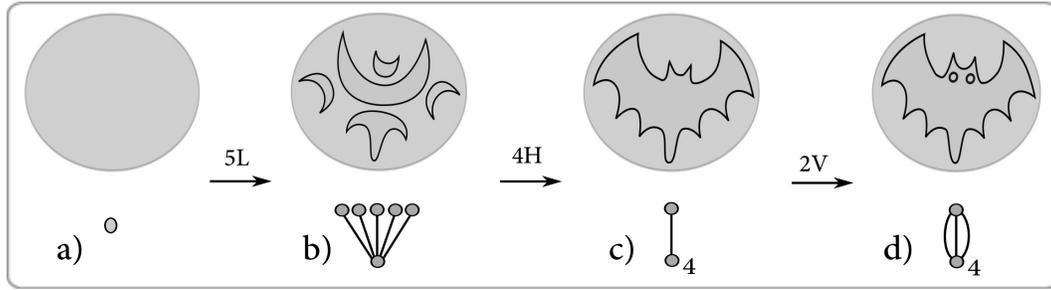


Figura 13: Aplicação do 6-toros na esfera.

A Figura 13 apresenta uma sequência (da esquerda para a direita) de aplicações com $d = 1$. A primeira corresponde a aplicação identidade da esfera na esfera com $A = 0$, $V = 1$, $W = 0$ (única componente regular que é a esfera). A segunda, também da esfera na esfera, tem $A = 5$, $V = 6$ e $W = 0$. Cada uma das curvas singulares pode ser obtida pela transição lábios. A terceira com $A = 1$, $V = 2$ e $W = 4$, pode ser obtida fazendo 4 cirurgias horizontais sobre a segunda aplicação. A última com $A = 3$, $V = 2$ e $W = 4$ pode ser obtida fazendo duas cirurgias verticais sobre a terceira (“olhos do morcego”).

A construção de grafos associados às aplicações estáveis entre superfícies garante que existe um grafo \mathcal{G} com pesos nos vértices associado a aplicação f . Se M é orientada então \mathcal{G} é um grafo bipartido, como visto na Proposição 12.6. Na próxima seção vamos mostrar que todo grafo bipartido está associado a alguma aplicação entre duas superfícies fechadas e orientada. Os resultados são baseados nos trabalhos [7], [8] e [13]. Primeiro veremos o caso de realização de árvores e depois grafos bipartidos, com aplicações no plano, na esfera e no n -toro.

15 Aplicações no plano

Nesta seção trataremos das aplicações de superfícies fechadas e orientadas no plano, no caso geral e citaremos alguns resultados para o caso particular das aplicações sem cúspides, baseados em [5], [6] e [7].

As árvores L_1 , L_2 e L_3 com peso total zero podem ser realizadas pelas aplicações estáveis da esfera no plano ilustradas (respectivamente) em a), c) e e) na Figura 3.

Teorema 15.1. *Toda árvore \mathcal{A} com peso zero pode ser realizada por alguma aplicação estável da esfera no plano.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4, toda árvore pode ser obtida como soma horizontal e vertical de grafos básicos tipo L_2 e L_3 , que podem ser realizados por uma aplicações da esfera no plano, como na Figura 3. Por soma conexa horizontais e verticais entre estas aplicações obtemos uma aplicação $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza a árvore dada. \square

Teorema 15.2. *Todo grafo bipartido \mathcal{G} com peso total zero pode ser realizado por uma aplicação estável $g : mT \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $m = \beta_1(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma árvore maximal de \mathcal{G} obtida retirando uma aresta de cada um dos ciclos de \mathcal{G} . Pelo Teorema 15.1, \mathcal{A} pode ser realizado no plano por uma aplicação h da esfera no plano. Uma aplicação $g : mT \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza \mathcal{G} , pode ser obtida fazendo uma cirurgia vertical sobre h para cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas retiradas de \mathcal{G} para obter \mathcal{A} . Como a esfera é conexa, cada cirurgia vertical sobre h altera por $+1$ o gênero da superfície resultante, então o gênero de M é $m = \beta_1(\mathcal{G})$. \square

A Figura 14 ilustra duas aplicações com única curva singular: em a) do toro no plano com $s(C) = 2$, em b) do r -bitoro no plano com $s(C) = 2r$.

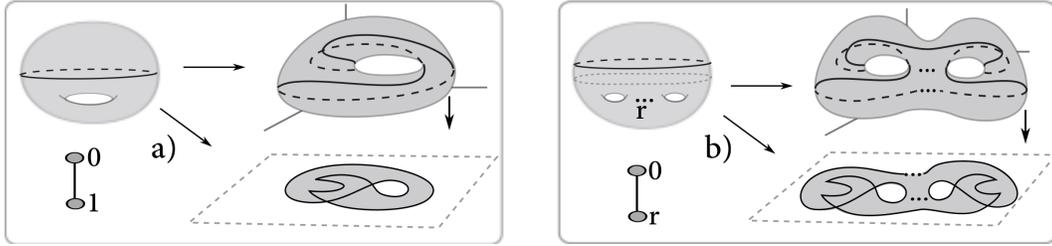


Figura 14: Aplicações no plano associada a L_1 com peso $[0 - 1]$ e $[0 - r]$.

Lema 15.3. *Toda árvore L_1 com peso r em um vértice e zero no outro pode ser realizada por alguma aplicação estável do r -toro no plano.*

Demonstração. A árvore L_1 com peso 1 pode ser realizada pela aplicação do toro no plano com única curva singular ilustrada na Figura 14 a). A aplicação $h : rT \rightarrow \mathbb{R}^2$ em b) realiza L_1 com peso r e pode ser obtida por $r - 1$ cirurgias horizontais sobre r aplicações do tipo a). \square

Teorema 15.4. *Toda árvore \mathcal{A} com peso total r pode ser realizada por alguma aplicação estável do r -toro no plano.*

Demonstração. Seja \mathcal{A}' uma árvore obtida retirando todos os t_i de cada vértice v_i de \mathcal{A} . Pelo Teorema 15.1 \mathcal{A}' pode ser realizada por uma aplicação estável $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para cada r_i , considere a aplicação $h^i : r_i T \rightarrow \mathbb{R}^2$ como no Lema 15.3. Fazendo cirurgias horizontais entre h e as aplicações $h^i : r_i T \rightarrow \mathbb{R}^2$, respeitando os pesos nos vértices de \mathcal{A} obtêm-se uma aplicação do r -toro no plano que realiza \mathcal{A} . \square

Teorema 15.5. *Todo grafo bipartido \mathcal{G} pode ser realizado por uma aplicação estável $g : mT \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $m = 1 - V + A + W$.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma árvore maximal de \mathcal{G} obtida retirando uma aresta de cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos de \mathcal{G} . Pelo Teorema 15.4, \mathcal{A} pode ser realizada no plano por uma aplicação h do W -toro no plano. Uma aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza \mathcal{G} , pode ser obtida fazendo uma cirurgia vertical sobre h para cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas retiradas de \mathcal{G} para obter \mathcal{A} . Como W -toro é conexo, cada cirurgia vertical sobre h altera por $+1$ o gênero da superfície resultante, então o gênero de M é $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$. \square

As demonstrações dos próximos resultados pode ser vista em [6] and [8] (respectivamente).

Corolário 15.6. *Toda árvore de peso zero pode ser realizado por alguma aplicação dobra (sem cúspides) da esfera no plano se, e somente se, satisfaz $V^+ = V^-$.*

observe que se \mathcal{A} pode ser decomposta em somente grafos tipo L_3 , este resultado pode ser facilmente verificado. Mas nem sempre isto é possível.

Teorema 15.7. *Um grafo bipartido $\mathcal{G}(V, A, W)$ pode ser realizado por alguma aplicação dobra (sem cúspides) no plano se, e somente se, \mathcal{G} satisfaz $V^+ - V^- = W^+ - W^-$.*

16 Aplicações na esfera

Nesta seção trataremos aplicações de superfícies fechadas e orientadas na esfera, no caso geral e citaremos alguns resultados para o caso particular das aplicações sem cúspides, baseados em [8]. A Figura 15 ilustra duas aplicações estáveis da esfera na esfera com $A = 1$ e $C = s(C) = 2d$, onde

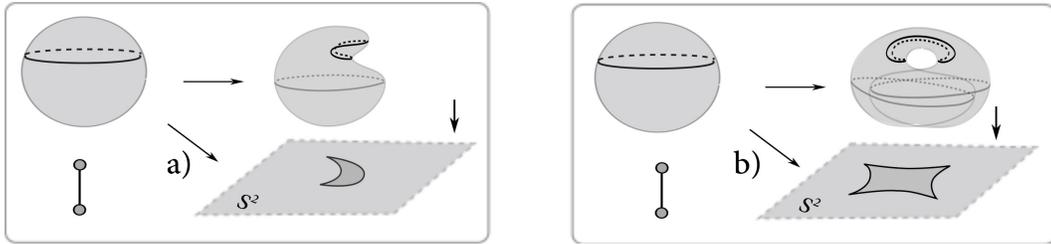


Figura 15: Exemplos de aplicações da esfera na esfera com grau 1 e 2.

a) $d = 1$ e em b) $d = 2$.

A aplicação em a) pode ser obtida da aplicação identidade $id : S^2 \rightarrow S^2$ por uma transição lábios, criando uma curva singular com duas cúspides. A aplicação em b) pode ser obtida por soma conexa entre duas aplicações do tipo em a).

Por $d - 1$ somas conexas horizontais entre d aplicações tipo a), obtemos uma aplicação da esfera na esfera com grau d e única curva singular.

A árvore L_1 com peso zero pode ser realizada pelas aplicações da esfera na esfera com grau 1 e 2 ilustradas na Figura 15. A árvores L_2 com peso zero pode ser realizada pela aplicação da esfera na esfera com grau 1 por a) na Figura 16. O grafo estrela com 3 arestas e peso zero pode ser realizado por uma aplicação com em b) obtida pela cirurgia horizontal entre duas aplicações tipo a).

Teorema 16.1. *Toda árvore \mathcal{A} de peso zero pode ser realizada por alguma aplicação estável da esfera na esfera com grau d arbitrário.*

Demonstração. Toda árvore de peso zero \mathcal{A} pode ser realizada por uma aplicação estável $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pelo Teorema 15.1. Considere o mergulho $j : h_1(S^2) \rightarrow S^2$. A aplicação estável $h = j \circ h : S^2 \rightarrow S^2$ é uma aplicação com grau zero da que realiza \mathcal{A} . Para realiza \mathcal{A} , basta fazer d cirurgias horizontais entre h e aplicações tipo a) na Figura 15. \square

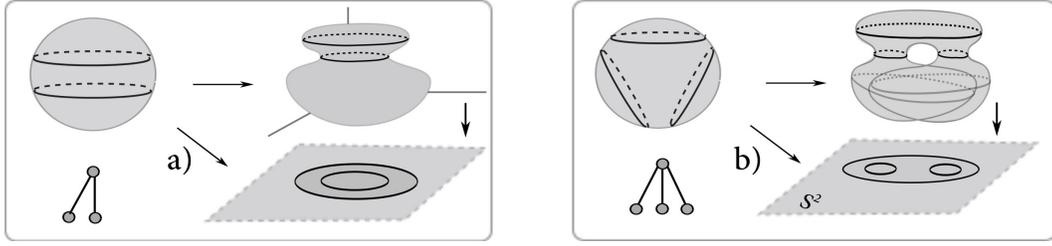


Figura 16: Aplicações dobra da esfera na esfera com grau 1 e 2.

Corolário 16.2. *Se \mathcal{A} pode ser decomposta em k árvore L_3 e d árvore L_2 então \mathcal{A} satisfaz $V^+ - V^- = d$ e pode ser realizada por alguma aplicação dobra $h : S^2 \rightarrow S^2$ com grau d .*

Demonstração. As árvores tipo L_2 estão associados às aplicações dobras com grau 1 tipo a) da Figura 16 e L_3 estão associados às aplicações dobra com grau zero tipo e) da Figura 3. Uma aplicação dobra $h : S^2 \rightarrow S^2$ com grau d , que realiza \mathcal{A} , pode ser obtido por $k - 1$ somas conexas horizontais entre as k aplicações dobras tipo e) da Figura 3 e $d - 1$ somas conexas horizontais entre d aplicações dobras tipo a) da Figura 16. \square

O próximo resultado para aplicações dobra foi provado em [8].

Teorema 16.3. *Uma árvore \mathcal{A} com peso zero pode ser realizada por alguma aplicação dobra (sem cúspides) na esfera com grau d se, e somente se, \mathcal{A} satisfaz $V^+ - V^- = d$.*

Lema 16.4. *Toda árvore \mathcal{A} com peso total $r > 0$ pode ser realizada por alguma aplicação estável $h : rT \rightarrow S^2$ com grau d arbitrário.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma árvore com pesos t_i dos vértices v_i , tal ue $r = \sum_{i=1}^V t_i$. Considere \mathcal{A}' o mesmo grafo \mathcal{A} mas com peso zero em todos os vértices. Pelo Teorema 16.1, \mathcal{A}' pode ser realizada na esfera por uma aplicação $g : S^2 \rightarrow S^2$ com o grau d arbitrário. Para cada $t_i > 0$, considere a aplicação $g^i = j \circ h^i : t_i T \rightarrow S^2$, onde $j^i : h^i(t_i T) \rightarrow S^2$ é um mergulho e a aplicação $h^i : t_i T \rightarrow S^2$ como Lema 15.3, associada ao grafo L_1 com peso $[0 - t_i]$. Fazendo cirurgias horizontais entre g e as aplicações g^i , respeitando os pesos nos vértices de \mathcal{A} , obtêm-se uma aplicação estável $h : rT \rightarrow S^2$ que realiza \mathcal{A} . \square

Teorema 16.5. *Todo grafo bipartido \mathcal{G} pode ser realizado por uma aplicação estável $f : mT \rightarrow S^2$ com grau d arbitrário, onde $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$.*

Demonstração. Retirando uma aresta de cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos de \mathcal{G} obtemos a árvore maximal \mathcal{A} com peso total W . Pelo Lema 16.4, \mathcal{A} pode ser realizada por uma aplicação h do W -toro na esfera. Fazendo uma cirurgia vertical sobre h para cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas retiradas de \mathcal{G} para obter \mathcal{A} , obtemos uma aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza \mathcal{G} . Como W -toro é conexo, cada cirurgia vertical sobre h altera por $+1$ o gênero da superfície resultante, então o gênero de M é $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$. \square

Referências

- [1] GIBSON. C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Research Notes in Maths, 25, Pitman (1979).
- [2] GOLUBITSKY. M.; GUILLEMIN. V. Stable Mappings and Their Singularities, Springer Verlag, Berlin (1976).
- [3] LIMA. E. L. Curso de Análise. Projeto Euclides. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [4] ———. Introdução à Topologia Diferencial. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [5] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232, Marcel and Dekker (2003), 227-235.
- [6] ———.; ———.: ———. Fold maps from the sphere to the plane, *Experimental Maths*, 15 (2006), 491-497.
- [7] ———.; ———.: ———. Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.*, 154 (2007), 166-175.
- [8] ———.; ———.: ———. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, *J. Singularities*, 2 (2010), 67-80.
- [9] HUAMANÍ N. B.; ———. AND PALACIOS J, Invariants of stable maps from the 3-sphere to the Euclidean 3-space, *Bull Braz Math Soc, New Series*. (2019).
- [10] KINSEY. L. C. *Topology of Surfaces*, Springer Verlag, New York (1993).
- [11] W. S. MASSEY, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer (1991).
- [12] MENDES DE JESUS. C., Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano. 2001. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2001.
- [13] ———., Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 36 (2017) 1185-1194.
- [14] ———.; MORAES. S. M. DE.; ROMERO FUSTER. M. C. Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 42 (2011), 87-103.
- [15] ———.; OSET SINHA. R.; ROMERO FUSTER. M. C., Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to R^3 , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 267 (2009), 205-216.
- [16] ———.; ROMERO FUSTER. M. C., Bridges, channels and Arnol'd invariants for generic plane curves, *Topology and its Applications*, 125 (2002), 505-524.

- [17] —.; —., Graphs of stable maps between closed surfaces, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B55 (2016), 147-159.
- [18] —.; —., Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane, *Topology and its Applications*, 234 (2017) 298–310.
- [19] MENDES DE JESUS. C. AND SANABRIA-CODESAL. E. , Realization of graphs by fold Gauss maps, *Topology and Its Appl.*, 234: 248-258 (2018).
- [20] MUNKRES. J. R., Topology: a first course, 2^a Edição. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [21] OHMOTO. T.; AICARDI. F., First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45 (2006), 27-45.
- [22] J. R. Quine, A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds. *Trans. AMS* 236: 307–314, 1978.
- [23] THOM. R. Les singularites des applications differentiables, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955-1956), 43-87.
- [24] VASSILIEV. V. A. Complements of Discriminants of smooth maps, *Topology and applications*, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [25] WHITNEY. H. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math. (2)* 62 (1955), 374-410.