Introdução aos Grupos Profinitos

Vagner R. de Bessa

Universidade Federal de Viçosa-UFV
Campus Rio Paranaíba

19 de fevereiro de 2013

Sumário

Sumário

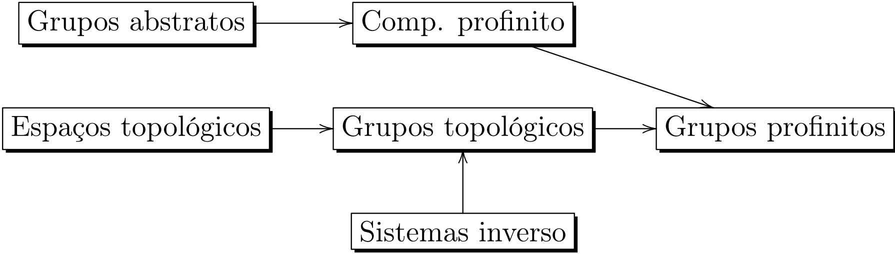
Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário


Grupos abstratos
Comp. profinito
Espaços topológicos
Grupos topológicos
Grupos profinitos
Sistemas inverso

O objetivo deste minicurso é:

O objetivo deste minicurso é:

- Estudar conceitos e propriedades básicas de espaços topológicos que serão utilizados posteriormente em grupos topológicos;

O objetivo deste minicurso é:

- Estudar conceitos e propriedades básicas de espaços topológicos que serão utilizados posteriormente em grupos topológicos;
- Definir e caracterizar um grupo profinito;

O objetivo deste minicurso é:

- Estudar conceitos e propriedades básicas de espaços topológicos que serão utilizados posteriormente em grupos topológicos;
- Definir e caracterizar um grupo profinito;
- Estudar alguns exemplos.

Espaços topológicos

Definição 2.1

Um espaço topológico é um conjunto X com uma família de subconjuntos de X (chamados conjuntos abertos) os quais satisfazem as seguintes condições:

Espaços topológicos

Definição 2.1

Um espaço topológico é um conjunto X com uma família de subconjuntos de X (chamados conjuntos abertos) os quais satisfazem as seguintes condições:

i) $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

Espaços topológicos

Definição 2.1

Um espaço topológico é um conjunto X com uma família de subconjuntos de X (chamados conjuntos abertos) os quais satisfazem as seguintes condições:

i) $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

ii) A interseção de dois abertos quaisquer é um conjunto aberto;

Espaços topológicos

Definição 2.1

Um espaço topológico é um conjunto X com uma família de subconjuntos de X (chamados conjuntos abertos) os quais satisfazem as seguintes condições:

i) $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

ii) A interseção de dois abertos quaisquer é um conjunto aberto;

iii) A união de uma coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Espaços topológicos

Definição 2.1

Um espaço topológico é um conjunto X com uma família de subconjuntos de X (chamados conjuntos abertos) os quais satisfazem as seguintes condições:

i) $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

ii) A interseção de dois abertos quaisquer é um conjunto aberto;

iii) A união de uma coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

A coleção dos subconjuntos abertos é uma topologia em X.

Definição 2.2

- Um subconjunto é chamado fechado se o complementar dele é aberto.

Definição 2.2

- Um subconjunto é chamado fechado se o complementar dele é aberto.
- Uma base para a topologia em X é uma coleção de subconjuntos abertos

$$\tau_\lambda := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

Definição 2.2

- Um subconjunto é chamado fechado se o complementar dele é aberto.
- Uma base para a topologia em X é uma coleção de subconjuntos abertos

$$\tau_\lambda := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

tal que cada aberto de X pode ser escrito como a união de subconjuntos U_λ para alguns $\lambda \in \Lambda$.

Proposição 2.3

Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Proposição 2.3

Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Para todo aberto A temos que $A = \cup_{x \in A} B_x$, tal que $B_x \in \beta$.

Proposição 2.3

Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Para todo aberto A temos que $A = \cup_{x \in A} B_x$, tal que $B_x \in \beta$.

($\Rightarrow$) Suponha que todo aberto $A \subset X$ pode ser escrito como $A = \cup B_\lambda$, $B_\lambda \in \beta$.

Proposição 2.3

Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Para todo aberto A temos que $A = \cup_{x \in A} B_x$, tal que $B_x \in \beta$.

($\Rightarrow$) Suponha que todo aberto $A \subset X$ pode ser escrito como $A = \cup B_\lambda$, $B_\lambda \in \beta$. Dado $x \in A$ existem algum λ tal que $x \in B_\lambda \subset A$. Ponha $B_x = B_\lambda$.

Base de um espaço topológico

Proposição 2.4

Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção β de subconjuntos de X é uma base para uma topologia sobre X se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

Base de um espaço topológico

Proposição 2.4

Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção β de subconjuntos de X é uma base para uma topologia sobre X se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) *Para cada $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$;*

Base de um espaço topológico

Proposição 2.4

Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção β de subconjuntos de X é uma base para uma topologia sobre X se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) *Para cada $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$;*

ii) *Se x pertence à interseção de dois conjuntos $B_1, B_2 \in \beta$ então existe um conjunto $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Topologia profinita

Exemplo 2.5

Seja G um grupo. Considere a coleção de subconjuntos

$$\beta = \{gN \mid N \triangleleft_f G, g \in G\}.$$

Então β é uma base para uma topologia em G.

Topologia profinita

Exemplo 2.5

Seja G um grupo. Considere a coleção de subconjuntos

$$\beta = \{gN \mid N \triangleleft_f G, g \in G\}.$$

Então β é uma base para uma topologia em G.

Demonstração: Observe que $G \in \beta$ logo a condição $i)$ da Proposição anterior é verificada.

Agora verifiquemos a condição ii).

Agora verifiquemos a condição $ii)$.
Sejam $g_1, g_2 \in G$ e $N_1, N_2 \in \beta$. Se $x \in g_1N_1 \cap g_2N_2$ então

Agora verifiquemos a condição ii).
Sejam $g_1, g_2 \in G$ e $N_1, N_2 \in \beta$. Se $x \in g_1N_1 \cap g_2N_2$ então

$$x \in xN_1 \cap N_2 \subseteq g_1N_1 \cap g_2N_2.$$

Agora verifiquemos a condição ii).
Sejam $g_1, g_2 \in G$ e $N_1, N_2 \in \beta$. Se $x \in g_1 N_1 \cap g_2 N_2$ então

$$x \in xN_1 \cap N_2 \subseteq g_1 N_1 \cap g_2 N_2.$$

Além disso, $N_1 \cap N_2 \in \beta$.

Agora verifiquemos a condição ii).
Sejam $g_1, g_2 \in G$ e $N_1, N_2 \in \beta$. Se $x \in g_1 N_1 \cap g_2 N_2$ então

$$x \in xN_1 \cap N_2 \subseteq g_1 N_1 \cap g_2 N_2.$$

Além disso, $N_1 \cap N_2 \in \beta$. Portanto β é uma base para uma topologia em X denominada topologia profinita.

Definição 2.6

Um espaço topológico X é chamado compacto se para cada família dada

$$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

de subconjuntos abertos, tal que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, existe uma família finita $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ com $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

Definição 2.6

Um espaço topológico X é chamado compacto se para cada família dada

$$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

de subconjuntos abertos, tal que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, existe uma família finita $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ com $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

Definição 2.7

Um espaço topológico é chamado Hausdorff se para cada par de elementos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças abertas $x \in U$, $y \in V$ tal que $U \cap V = \emptyset$.

Definição 2.8

- Um espaço topológico X é dito conexo se não pode ser representado como uma união disjunta de subconjuntos abertos.

Definição 2.8

- Um espaço topológico X é dito conexo se não pode ser representado como uma união disjunta de subconjuntos abertos.
- X é chamado totalmente desconexo se cada subespaço conexo tem no máximo um elemento.

Exemplo 2.9

A coleção $\beta = \{I \subset \mathbb{R}\ ;\ I \text{ é um intervalo aberto}\}$ é uma base para a topologia usual da reta.

Exemplo 2.9

A coleção $\beta = \{I \subset \mathbb{R}\ ;\ I \text{ é um intervalo aberto}\}$ é uma base para a topologia usual da reta.

Exemplo 2.10

Se X é um conjunto e β é o conjunto de todos os subconjuntos de X então β é uma base para uma topologia em X denominada topologia discreta.

Exemplo 2.9

A coleção $\beta = \{I \subset \mathbb{R} \; ; \; I \text{ é um intervalo aberto}\}$ é uma base para a topologia usual da reta.

Exemplo 2.10

Se X é um conjunto e β é o conjunto de todos os subconjuntos de X então β é uma base para uma topologia em X denominada topologia discreta. Além disso X com topologia discreta é Hausdorff, totalmente desconexo e compacto.

Função contínua

Definição 2.11

Uma aplicação $f : X \to Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y, diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subseteq Y$ for um aberto em X.

Função contínua

Definição 2.11

Uma aplicação $f : X \to Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y, diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subseteq Y$ for um aberto em X.

Mais especificamente, f é contínua em um ponto $a \in X$ quando, para cada aberto $B \subset Y$, com $f(a) \in B$, existe um aberto $A \subset X$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subset B$.

Produto cartesiano

O produto cartesiano de uma família $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos é definido como o conjunto das aplicações

Produto cartesiano

O produto cartesiano de uma família $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos é definido como o conjunto das aplicações

$$f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

tal que $f(\lambda) \in X_\lambda$ para cada λ.

Produto cartesiano

O produto cartesiano de uma família $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos é definido como o conjunto das aplicações

$$f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

tal que $f(\lambda) \in X_\lambda$ para cada λ.

Notação: $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Produto cartesiano

O produto cartesiano de uma família $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos é definido como o conjunto das aplicações

$$f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

tal que $f(\lambda) \in X_\lambda$ para cada λ.

Notação: $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Produto cartesiano

Podemos pensar nos elementos de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ como vetores infinitos com coordenadas indexadas por λ, i.e.,

$$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tal que $x_\lambda \in X_\lambda$.

Produto cartesiano

Podemos pensar nos elementos de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ como vetores infinitos com coordenadas indexadas por λ, i.e.,

$$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tal que $x_\lambda \in X_\lambda$.
Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe uma aplicação projeção

$$\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$$

definida por

$$\pi_\lambda\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = x_\lambda.$$

Topologia produto

Suponha que X_λ são espaços topológicos.

Topologia produto

Suponha que X_λ são espaços topológicos.Podemos definir uma topologia em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ de forma que cada aplicação projeção π_λ seja contínua.

Topologia produto

Suponha que X_λ são espaços topológicos.Podemos definir uma topologia em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ de forma que cada aplicação projeção π_λ seja contínua. Essa topologia é denominada topologia produto cuja base de abertos é dado por:

$$\left\{ \pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n) \mid n \ \in \mathbb{N}, U_i \text{ é aberto em } X_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços topológicos. Então:*

a) *Se cada* X_λ *é Hausdorff,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços topológicos. Então:*

a) *Se cada* X_λ *é Hausdorff,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

b) *Se cada* X_λ *é totalmente desconexo,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços topológicos. Então:*

a) *Se cada* X_λ *é Hausdorff,* $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *também é.*

b) *Se cada* X_λ *é totalmente desconexo,* $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *também é.*

c) *Se cada* X_λ *é compacto,* $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *também é.*

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços topológicos. Então:*

a) *Se cada* X_λ *é Hausdorff,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

b) *Se cada* X_λ *é totalmente desconexo,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

c) *Se cada* X_λ *é compacto,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

Demonstração: *a*) Tome $x = (x_\lambda), y = (y_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos. Então:

a) *Se cada X_λ é Hausdorff, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

b) *Se cada X_λ é totalmente desconexo, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

c) *Se cada X_λ é compacto, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

Demonstração: *a)* Tome $x = (x_\lambda), y = (y_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Se $x \neq y$ então existe $\lambda_j \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_j} \neq y_{\lambda_j}$.

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços topológicos. Então:*

a) *Se cada* X_λ *é Hausdorff,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*
b) *Se cada* X_λ *é totalmente desconexo,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*
c) *Se cada* X_λ *é compacto,* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *também é.*

Demonstração: *a)* Tome $x = (x_\lambda), y = (y_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Se $x \neq y$ então existe $\lambda_j \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_j} \neq y_{\lambda_j}$. Sejam U e V vizinhanças abertas de x_{λ_j} e y_{λ_j} em X_{λ_j} tal que $U \cap V = \emptyset$.

Algumas propriedades topológicas

Proposição 2.12

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos. Então:

a) *Se cada X_λ é Hausdorff, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

b) *Se cada X_λ é totalmente desconexo, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

c) *Se cada X_λ é compacto, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ também é.*

Demonstração: *a*) Tome $x = (x_\lambda), y = (y_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Se $x \neq y$ então existe $\lambda_j \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_j} \neq y_{\lambda_j}$. Sejam U e V vizinhanças abertas de x_{λ_j} e y_{λ_j} em X_{λ_j} tal que $U \cap V = \emptyset$. Portanto $\pi_{\lambda_j}^{-1}(U) \cap \pi_{\lambda_j}^{-1}(V) = \emptyset$. E o resultado segue.

b) Iremos usar o seguinte resultado: A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é conexo.

$b)$ Iremos usar o seguinte resultado: A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é conexo. Portanto a projeção em cada X_λ de um conjunto conexo não vazio de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ contém um único elemento.

$b)$ Iremos usar o seguinte resultado: A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é conexo. Portanto a projeção em cada X_λ de um conjunto conexo não vazio de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ contém um único elemento.

$c)$ ver: *Elementos de Topologia Geral*, Lima, E.L., página 256.

Propriedade da interseção finita

Proposição 2.13

Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para cada família $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados de X tal que a interseção de um número finito de conjuntos C_λ não é vazio implica que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Propriedade da interseção finita

Proposição 2.13

Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para cada família $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados de X tal que a interseção de um número finito de conjuntos C_λ não é vazio implica que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ uma cobertura aberta de X.

Logo $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = \emptyset$.

Propriedade da interseção finita

Proposição 2.13

Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para cada família $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados de X tal que a interseção de um número finito de conjuntos C_λ não é vazio implica que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Seja $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ uma cobertura aberta de X.

Logo $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = \emptyset$. Desta forma $\mathcal{F} = \{A_\lambda^c \mid \lambda \in \Lambda\}$ não possui a propriedade da interseção finita, ou seja, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que $A_{\lambda_1}^c \cap \ldots \cap A_{\lambda_n}^c = \emptyset$.

Propriedade da interseção finita

Proposição 2.13

Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para cada família $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados de X tal que a interseção de um número finito de conjuntos C_λ não é vazio implica que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ uma cobertura aberta de X. Logo $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = \emptyset$. Desta forma $\mathcal{F} = \{A_\lambda^c \mid \lambda \in \Lambda\}$ não possui a propriedade da interseção finita, ou seja, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que $A_{\lambda_1}^c \cap \ldots \cap A_{\lambda_n}^c = \emptyset$. Portanto $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço topológico compacto e

$$\mathcal{F} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

uma coleção de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade:a interseção de uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é sempre não vazio.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço topológico compacto e

$$\mathcal{F} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

uma coleção de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade:a interseção de uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é sempre não vazio. Suponha que $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \emptyset$.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço topológico compacto e

$$\mathcal{F} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

uma coleção de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade:a interseção de uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é sempre não vazio. Suponha que $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \emptyset$.

Desta forma $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c = X$.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço topológico compacto e

$$\mathcal{F} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

uma coleção de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade:a interseção de uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é sempre não vazio. Suponha que $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \emptyset$.

Desta forma $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^c = X$. Como X é compacto existem

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\lambda_i}^c$.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço topológico compacto e

$$\mathcal{F} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

uma coleção de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade:a interseção de uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é sempre não vazio. Suponha que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \emptyset$.

Desta forma $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^c = X$. Como X é compacto existem

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\lambda_i}^c$. Portanto

$B_{\lambda_1} \cap \ldots \cap B_{\lambda_n} = \emptyset$. Contrariando a propriedade da interseção finita.

Proposição 2.14

Cada subconjunto de um espaço topológico Hausdorff X de cardinalidade 1 é fechado.

Proposição 2.14

Cada subconjunto de um espaço topológico Hausdorff X de cardinalidade 1 é fechado.

Demonstração: Tome $x \in X$. Iremos mostrar que $X - \{x\}$ é aberto.

Proposição 2.14

Cada subconjunto de um espaço topológico Hausdorff X de cardinalidade 1 é fechado.

Demonstração: Tome $x \in X$. Iremos mostrar que $X - \{x\}$ é aberto. De fato, para cada $y \in X - \{x\}$ existem abertos A_y e B_y tal que $x \in A_y$ e $y \in B_y$ com $A_y \cap B_y = \emptyset$.

Proposição 2.14

Cada subconjunto de um espaço topológico Hausdorff X de cardinalidade 1 é fechado.

Demonstração: Tome $x \in X$. Iremos mostrar que $X - \{x\}$ é aberto. De fato, para cada $y \in X - \{x\}$ existem abertos A_y e B_y tal que $x \in A_y$ e $y \in B_y$ com $A_y \cap B_y = \emptyset$. Em particular $B_y \subset X - \{x\}$. Portanto $X - \{x\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} B_y$ é aberto.

Proposição 2.15

i) *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto;*

Proposição 2.15

i) *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto;*

ii) *Cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*

Proposição 2.15

i) *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto;*

ii) *Cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*

iii) *Se $f : X \to Y$ é contínua e X compacto, então $f(X)$ é compacto;*

Proposição 2.15

i) *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto;*

ii) *Cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*

iii) *Se* $f : X \to Y$ *é contínua e* X *compacto, então* $f(X)$ *é compacto;*

iv) *Se* $f, g : X \to Y$ *são funções contínuas e* Y *é Hausdorff, então*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Demonstração: $iv)$ Considere o conjunto

$$N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Mostraremos que N é um conjunto aberto.

Demonstração: $iv)$ Considere o conjunto

$$N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Mostraremos que N é um conjunto aberto.
De fato, tome $y \in N$. Como Y é Hausdorff, exitem vizinhanças abertas U, V de $f(y)$ e $g(y)$ respectivamente, tal que $U \cap V = \emptyset$.

Demonstração: $iv)$ Considere o conjunto

$$N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Mostraremos que N é um conjunto aberto.
De fato, tome $y \in N$. Como Y é Hausdorff, exitem vizinhanças abertas U, V de $f(y)$ e $g(y)$ respectivamente, tal que $U \cap V = \emptyset$.
Desta forma o conjunto $B_y = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subset N$ é aberto.
Portanto $N = \bigcup_{y \in N} B_y$ é aberto.

Grupos topológicos

Definição 3.1

Um grupo topológico G é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo tal que:

Grupos topológicos

Definição 3.1

Um grupo topológico G é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo tal que:

i) A aplicação $m : G \times G \to G$ definida por $m(x, y) = xy$ é contínua quando consideramos $G \times G$ com topologia produto;

Grupos topológicos

Definição 3.1

Um grupo topológico G é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo tal que:

i) A aplicação $m : G \times G \to G$ definida por $m(x, y) = xy$ é contínua quando consideramos $G \times G$ com topologia produto;

ii) A aplicação $i : G \to G$ definida por $i(x) = x^{-1}$ é contínua.

Observação 3.2

- Observe que $i)$ é equivalente a:

Observação 3.2

- Observe que $i)$ é equivalente a:sempre que $U \subseteq G$ é um aberto e $g_1 g_2 \in U$ então existem conjuntos abertos V_1 e V_2 com $g_1 \in V_1$ e $g_2 \in V_2$ tal que $V_1 V_2 \subseteq U$.

Observação 3.2

- Observe que $i)$ é equivalente a:sempre que $U \subseteq G$ é um aberto e $g_1 g_2 \in U$ então existem conjuntos abertos V_1 e V_2 com $g_1 \in V_1$ e $g_2 \in V_2$ tal que $V_1 V_2 \subseteq U$.

- A afirmação $ii)$ é equivalente a:sempre que $U \subseteq G$ é aberto então U^{-1} é aberto de G.

Exemplo 3.3

Abaixo seguem alguns exemplos de grupos topológicos:

a) Se G é qualquer grupo munido da topologia discreta;

Exemplo 3.3

Abaixo seguem alguns exemplos de grupos topológicos:

a) Se G é qualquer grupo munido da topologia discreta;

b) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^{*}, \times)$ com topologia usual;

Exemplo 3.3

Abaixo seguem alguns exemplos de grupos topológicos:

a) Se G é qualquer grupo munido da topologia discreta;
b) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \times)$ com topologia usual;
c) Todo subgrupo U de um grupo topológico G é um grupo topológico (a topologia em U é considerada induzida pela topologia de G).

Exemplo 3.4

Sejam G um grupo abstrato e

$$\beta = \{gN \mid N \triangleleft_f G, g \in G\}$$

uma coleção de subconjuntos.

Exemplo 3.4

Sejam G um grupo abstrato e

$$\beta = \{gN \mid N \triangleleft_f G, g \in G\}$$

uma coleção de subconjuntos. Provamos que β é uma base para uma topologia em G (topologia profinita). Queremos mostrar que G munido da topologia profinita é um grupo topológico.

Demonstração: Observe que os abertos básicos de G são classes laterais da forma gN tal que $N \triangleleft_f G$, $g \in G$.

Demonstração: Observe que os abertos básicos de G são classes laterais da forma gN tal que $N \triangleleft_f G$, $g \in G$. Tome $x_0 y_0 \in gN$. Assim:

$$x_0 y_0 \in gN \Leftrightarrow x_0 \in g y_0^{-1} N \text{ e } y_0 \in x_0^{-1} gN.$$

Demonstração: Observe que os abertos básicos de G são classes laterais da forma gN tal que $N \triangleleft_f G$, $g \in G$. Tome $x_0 y_0 \in gN$. Assim:

$$x_0 y_0 \in gN \Leftrightarrow x_0 \in g y_0^{-1} N \text{ e } y_0 \in x_0^{-1} g N.$$

Logo $g y_0^{-1} N$ e $x_0^{-1} g N$ são vizinhanças abertas de x_0, y_0 respectivamente. Além disso:

$$g y_0^{-1} N . x_0^{-1} g N = g y_0^{-1} x_0^{-1} g N = gN$$

Demonstração: Observe que os abertos básicos de G são classes laterais da forma gN tal que $N \triangleleft_f G$, $g \in G$. Tome $x_0 y_0 \in gN$. Assim:

$$x_0 y_0 \in gN \Leftrightarrow x_0 \in g y_0^{-1} N \text{ e } y_0 \in x_0^{-1} gN.$$

Logo $g y_0^{-1} N$ e $x_0^{-1} gN$ são vizinhanças abertas de x_0, y_0 respectivamente. Além disso:

$$g y_0^{-1} N . x_0^{-1} gN = g y_0^{-1} x_0^{-1} gN = gN$$

Desde que $g^{-1} x_0 y_0 \in N$.

Demonstração: Observe que os abertos básicos de G são classes laterais da forma gN tal que $N \triangleleft_f G$, $g \in G$. Tome $x_0 y_0 \in gN$. Assim:

$$x_0 y_0 \in gN \Leftrightarrow x_0 \in g y_0^{-1} N \text{ e } y_0 \in x_0^{-1} g N.$$

Logo $g y_0^{-1} N$ e $x_0^{-1} g N$ são vizinhanças abertas de x_0, y_0 respectivamente. Além disso:

$$g y_0^{-1} N . x_0^{-1} g N = g y_0^{-1} x_0^{-1} g N = gN$$

Desde que $g^{-1} x_0 y_0 \in N$. Portanto $m : G \times G \to G$ é contínua.

Para cada $g \in G$, $N \triangleleft_f G$ resta mostrar que $(gN)^{-1}$ é aberto.

Para cada $g \in G$, $N \lhd_f G$ resta mostrar que $(gN)^{-1}$ é aberto.De fato,

$$(gN)^{-1} = \{(gn)^{-1} \mid n \in N\} = \{n^{-1}g^{-1} \mid n \in N\} = Ng^{-1} = g^{-1}N$$

Para cada $g \in G$, $N \lhd_f G$ resta mostrar que $(gN)^{-1}$ é aberto.De fato,

$$(gN)^{-1} = \left\{(gn)^{-1} \mid n \in N\right\} = \left\{n^{-1}g^{-1} \mid n \in N\right\} = Ng^{-1} = g^{-1}N$$

Portanto $i : G \to G$ é contínua.

Algumas propriedades de grupos topológicos

Teorema 3.5

Seja G um grupo topológico. Então:

i) *A aplicação $i : G \to G$ é um homeomorfismo. Para cada $g \in G$ as aplicações $x \to gx$ e $x \to xg$ são homeomorfismos.*

Algumas propriedades de grupos topológicos

Teorema 3.5

Seja G um grupo topológico. Então:

i) *A aplicação $i : G \to G$ é um homeomorfismo. Para cada $g \in G$ as aplicações $x \to gx$ e $x \to xg$ são homeomorfismos.*

ii) *Se H é um subgrupo aberto (resp. fechado) de G, então cada classe lateral Hg ou gH em G é aberto (resp. fechado).*

Algumas propriedades de grupos topológicos

Teorema 3.5

Seja G um grupo topológico. Então:

i) *A aplicação $i : G \to G$ é um homeomorfismo. Para cada $g \in G$ as aplicações $x \to gx$ e $x \to xg$ são homeomorfismos.*

ii) *Se H é um subgrupo aberto (resp. fechado) de G, então cada classe lateral Hg ou gH em G é aberto (resp. fechado).*

iii) *Cada subgrupo aberto de G é fechado, e cada subgrupo fechado de índice finito é aberto. Se G é compacto, cada subgrupo aberto tem índice finito.*

iv) Se H é um subgrupo que contém um subconjunto aberto $U \neq 0$, então H é aberto.

iv) Se H é um subgrupo que contém um subconjunto aberto $U \neq 0$, então H é aberto.

v) Se H é um subgrupo de G, então H é grupo topológico com topologia induzida. Se K é um subgrupo normal, então G/K é grupo topológico com topologia quociente. O homomorfismo quociente $q : G \to G/K$ é aberto.

Demonstração: i) Observe que $i = i^{-1}$ logo i é homeomorfismo.

iv) Se H é um subgrupo que contém um subconjunto aberto $U \neq 0$, então H é aberto.

v) Se H é um subgrupo de G, então H é grupo topológico com topologia induzida. Se K é um subgrupo normal, então G/K é grupo topológico com topologia quociente. O homomorfismo quociente $q : G \to G/K$ é aberto.

Demonstração: i) Observe que $i = i^{-1}$ logo i é homeomorfismo. Considere a aplicação $\varphi_g : G \to G \times G$ definida por $\varphi_g(x) = (x, g)$. Observe que φ_g é contínua,

iv) Se H é um subgrupo que contém um subconjunto aberto $U \neq 0$, então H é aberto.

v) Se H é um subgrupo de G, então H é grupo topológico com topologia induzida. Se K é um subgrupo normal, então G/K é grupo topológico com topologia quociente. O homomorfismo quociente $q : G \to G/K$ é aberto.

Demonstração: i) Observe que $i = i^{-1}$ logo i é homeomorfismo. Considere a aplicação $\varphi_g : G \to G \times G$ definida por $\varphi_g(x) = (x, g)$. Observe que φ_g é contínua, logo as aplicações $x \mapsto xg$ e $x \mapsto gx$ são contínuas.

iv) Se H é um subgrupo que contém um subconjunto aberto $U \neq 0$, então H é aberto.

v) Se H é um subgrupo de G, então H é grupo topológico com topologia induzida. Se K é um subgrupo normal, então G/K é grupo topológico com topologia quociente. O homomorfismo quociente $q : G \to G/K$ é aberto.

Demonstração: i) Observe que $i = i^{-1}$ logo i é homeomorfismo. Considere a aplicação $\varphi_g : G \to G \times G$ definida por $\varphi_g(x) = (x, g)$. Observe que φ_g é contínua, logo as aplicações $x \mapsto xg$ e $x \mapsto gx$ são contínuas.

ii) Segue diretamente de i).

iii) Suponha que H é aberto.

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto,

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado.

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado.
Suponha agora que H é fechado e $[G : H] < \infty$

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado. Suponha agora que H é fechado e $[G : H] < \infty$ então $\bigcup_{g \notin H} Hg$ é fechado e H é aberto.

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado.
Suponha agora que H é fechado e $[G : H] < \infty$ então $\bigcup_{g \notin H} Hg$ é fechado e H é aberto.
Observe que $G = \bigcup_{g \notin H} Hg \bigcup H$.

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado.
Suponha agora que H é fechado e $[G : H] < \infty$ então $\bigcup_{g \notin H} Hg$ é fechado e H é aberto.
Observe que $G = \bigcup_{g \notin H} Hg \bigcup H$. Se G é compacto, por definição possui uma subcobertura finita, logo $[G : H]$ é finito.

$iii)$ Suponha que H é aberto. Então $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} Hg$ é aberto, logo o complementar de $G \backslash H$ que é igual a H é fechado.
Suponha agora que H é fechado e $[G : H] < \infty$ então $\bigcup_{g \notin H} Hg$ é fechado e H é aberto.
Observe que $G = \bigcup_{g \notin H} Hg \bigcup H$. Se G é compacto, por definição possui uma subcobertura finita, logo $[G : H]$ é finito.

$iv)$ Observe que $H = \bigcup_{h \in H} Uh$.

$v)$ A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

$v)$ A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

Desta forma, a aplicação $q : G \to G/K$ é aberta, isto é, leva conjunto aberto de G em conjunto aberto de G/K.

$v)$ A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

Desta forma, a aplicação $q : G \to G/K$ é aberta, isto é, leva conjunto aberto de G em conjunto aberto de G/K.

Além disso, dado $U \subseteq_o G$ temos

$v)$ A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

Desta forma, a aplicação $q : G \to G/K$ é aberta, isto é, leva conjunto aberto de G em conjunto aberto de G/K.

Além disso, dado $U \subseteq_o G$ temos

$$q^{-1}(\bigcup_{u \in U} Ku) = \bigcup_{u \in U} Ku = KU =$$

v) A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

Desta forma, a aplicação $q : G \to G/K$ é aberta, isto é, leva conjunto aberto de G em conjunto aberto de G/K.

Além disso, dado $U \subseteq_o G$ temos

$$q^{-1}(\bigcup_{u \in U} Ku) = \bigcup_{u \in U} Ku = KU = \bigcup_{k \in K} kU.$$

$v)$ A topologia quociente em G/K é dada por

$$\tau_B = \left\{ \bigcup_{u \in U} Ku \mid U \subset_o G \right\}$$

Desta forma, a aplicação $q : G \to G/K$ é aberta, isto é, leva conjunto aberto de G em conjunto aberto de G/K.

Além disso, dado $U \subseteq_o G$ temos

$$q^{-1}(\bigcup_{u \in U} Ku) = \bigcup_{u \in U} Ku = KU = \bigcup_{k \in K} kU.$$

Logo q é contínua.
Resta mostrar que G/K é grupo topológico.

A aplicação $i_K : G/K \to G/K$ definida por $i_K(gK) = g^{-1}K$ é contínua desde que o diagrama abaixo é comutativo.

A aplicação $i_K : G/K \to G/K$ definida por $i_K(gK) = g^{-1}K$ é contínua desde que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[d, "q"] \\ G/K \arrow[r, "i_K"'] & G/K \end{tikzcd}$$

A aplicação $m_K : G/K \times G/K \to G/K$ definida por

$$m_K(g_1K, g_2K) = g_1g_2K$$

é contínua desde que o diagrama abaixo é comutativo.

A aplicação $m_K : G/K \times G/K \to G/K$ definida por

$$m_K(g_1K, g_2K) = g_1g_2K$$

é contínua desde que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q \times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/K \times G/K \arrow[r, "m_K"] & G/K \end{tikzcd}$$

Proposição 3.6

Sejam G um grupo topológico compacto, totalmente desconexo e X um subconjunto fechado de G. Então
$$X = \bigcap_{N \triangleleft_o G} NX.$$

Proposição 3.6

Sejam G um grupo topológico compacto, totalmente desconexo e X um subconjunto fechado de G. Então $X = \bigcap_{N \lhd_o G} NX$*.Particularmente, a interseção de todos os subgrupos normais abertos de G é trivial.*

Proposição 3.6

Sejam G um grupo topológico compacto, totalmente desconexo e X um subconjunto fechado de G. Então

$$X = \bigcap_{N \triangleleft_o G} NX.$$

Particularmente, a interseção de todos os subgrupos normais abertos de G é trivial.

Demonstração: Observe que $X \subset \bigcap_{N \lhd_o G} NX$. Tome $g \in G$ tal que $g \notin X$. Resta mostrar que existe $\tilde{N} \lhd_o G$ tal que $g \notin \tilde{N}X$.

Demonstração: Observe que $X \subset \bigcap_{N \triangleleft_o G} NX$. Tome $g \in G$ tal que $g \notin X$. Resta mostrar que existe $\tilde{N} \triangleleft_o G$ tal que $g \notin \tilde{N}X$. De fato, observe que $g \in G \backslash X$ que é aberto.

Demonstração: Observe que $X \subset \bigcap_{N \triangleleft_o G} NX$. Tome $g \in G$ tal que $g \notin X$. Resta mostrar que existe $\tilde{N} \triangleleft_o G$ tal que $g \notin \tilde{N}X$.
De fato, observe que $g \in G \backslash X$ que é aberto.Logo existe $\tilde{N} \triangleleft_o G$ tal que $g\tilde{N} \subset G \backslash X$, isto é,

$$g\tilde{N} \cap X = \emptyset.$$

Portanto $g \notin \tilde{N}X$.

Demonstração: Observe que $X \subset \bigcap_{N \lhd_o G} NX$. Tome $g \in G$ tal que $g \notin X$. Resta mostrar que existe $\tilde{N} \lhd_o G$ tal que $g \notin \tilde{N}X$.
De fato, observe que $g \in G \backslash X$ que é aberto.Logo existe $\tilde{N} \lhd_o G$ tal que $g\tilde{N} \subset G \backslash X$, isto é,

$$g\tilde{N} \cap X = \emptyset.$$

Portanto $g \notin \tilde{N}X$.

Observe que $X = \{1\}$ é fechado em G (desde que G é Hausdorff). Logo $\bigcap_{N \lhd_o G} N = 1$.

Exercícios 3.7

Suponha que G é um grupo topológico Hausdorff.

1) Se S é um subconjunto de G. Mostre que o centralizador de S em G, denotado por $C_G(S)$, é fechado.

Exercícios 3.7

Suponha que G é um grupo topológico Hausdorff.

1) Se S é um subconjunto de G. Mostre que o centralizador de S em G, denotado por $C_G(S)$, é fechado.
2) Se H é um subgrupo fechado de G provar que $N_G(H)$ (normalizador de H em G) é um subgrupo fechado.

Exercícios 3.7

Suponha que G é um grupo topológico Hausdorff.

1) Se S é um subconjunto de G. Mostre que o centralizador de S em G, denotado por $C_G(S)$, é fechado.
2) Se H é um subgrupo fechado de G provar que $N_G(H)$ (normalizador de H em G) é um subgrupo fechado.
3) Provar que o fecho de um subgrupo abeliano é abeliano.

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

a) $i \preceq i$ para todo $i \in I$;

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

a) $i \preceq i$ para todo $i \in I$;

b) $i \preceq j$ e $j \preceq k$ implica $i \preceq k$ para todo $i, j, k \in I$;

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

a) $i \preceq i$ para todo $i \in I$;

b) $i \preceq j$ e $j \preceq k$ implica $i \preceq k$ para todo $i, j, k \in I$;

c) $i \preceq j$ e $j \preceq i$ implica $i = j$ para $i, j \in I$;

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

a) $i \preceq i$ para todo $i \in I$;
b) $i \preceq j$ e $j \preceq k$ implica $i \preceq k$ para todo $i, j, k \in I$;
c) $i \preceq j$ e $j \preceq i$ implica $i = j$ para $i, j \in I$;
d) Se $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i, j \preceq k$.

Limite inverso

Definição 4.1

Um conjunto $(I, \preceq)$ é denominado conjunto dirigido se satisfaz as seguintes condições:

a) $i \preceq i$ para todo $i \in I$;

b) $i \preceq j$ e $j \preceq k$ implica $i \preceq k$ para todo $i, j, k \in I$;

c) $i \preceq j$ e $j \preceq i$ implica $i = j$ para $i, j \in I$;

d) Se $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i, j \preceq k$.

Exemplo 4.2

Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ com ordem natural, são dirigidos.

Sistema projetivo

Um sistema projetivo (ou inverso) de grupos topológicos consiste em uma família $\{X_i \mid i \in I\}$ de grupos topológicos indexados por um conjunto dirigido I

Sistema projetivo

Um sistema projetivo (ou inverso) de grupos topológicos consiste em uma família $\{X_i \mid i \in I\}$ de grupos topológicos indexados por um conjunto dirigido I e uma família de homomorfismos contínuos $\varphi_{ij} : X_i \to X_j$ definidos quando $i \succeq j$ tal que $\varphi_{ii} = id$

Sistema projetivo

Um sistema projetivo (ou inverso) de grupos topológicos consiste em uma família $\{X_i \mid i \in I\}$ de grupos topológicos indexados por um conjunto dirigido I e uma família de homomorfismos contínuos $\varphi_{ij} : X_i \to X_j$ definidos quando $i \succeq j$ tal que $\varphi_{ii} = id$ e os diagramas:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"'] & X_j \arrow[d, "\varphi_{jk}"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

comutam para todos $i \succeq j \succeq k$.

Exemplo 4.3

Sejam $I = \mathbb{N}$ com ordem comum, $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ uma família de grupos finitos e $\varphi_{i+1,i} : X_{i+1} \to X_i$ um conjunto de homomorfismos arbitrários definidos para $i \geq 1$. Definimos $\varphi_{ii} = id$ para cada i e $\varphi_{ij} = \varphi_{j+1,j}\varphi_{j+2,j+1} \ldots \varphi_{i,i-1}$ para $i > j$. Então $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema projetivo.

Exemplo 4.4

Sejam G um grupo e I uma família de subgrupos normais com a seguinte propriedade: Dados $U_1, U_2 \in I$ existe um subgrupo $V \in I$ tal que $V \leq U_1 \cap U_2$. Então I é um conjunto dirigido com ordem

$$U \preceq V \Leftrightarrow V \leq U.$$

Exemplo 4.4

Sejam G um grupo e I uma família de subgrupos normais com a seguinte propriedade: Dados $U_1, U_2 \in I$ existe um subgrupo $V \in I$ tal que $V \leq U_1 \cap U_2$. Então I é um conjunto dirigido com ordem

$$U \preceq V \Leftrightarrow V \leq U.$$

Para $U \preceq V$ definimos $\varphi_{VU} : G/V \longrightarrow G/U$ por $\varphi_{VU}(gV) = gU$. Então $\{G/U, \varphi_{VU}, I\}$ é um sistema projetivo.

Aplicações compatíveis

Definição 4.5

Sejam Y um grupo topológico, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema projetivo de grupos topológicos e $\psi_i : Y \to X_i$ homomorfismos contínuos.

Aplicações compatíveis

Definição 4.5

Sejam Y um grupo topológico, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema projetivo de grupos topológicos e $\psi_i : Y \to X_i$ homomorfismos contínuos.Dizemos que os homomorfismos ψ_i são compatíveis se $\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j$ sempre que $i \succeq j$.

Aplicações compatíveis

Definição 4.5

Sejam Y um grupo topológico, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema projetivo de grupos topológicos e $\psi_i : Y \to X_i$ homomorfismos contínuos.Dizemos que os homomorfismos ψ_i são compatíveis se $\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j$ sempre que $i \succeq j$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & X_i \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \\
& X_j
\end{tikzcd}$$

Limite inverso

Definição 4.6

Dado um sistema projetivo de grupos topológicos $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$, dizemos que X juntamente com os homomorfismos compatíveis $\varphi_i : X \to X_i$ é um limite inverso do sistema, se satisfazem a seguinte propriedade universal:

Sempre que Y é um grupo topológico e $\psi_i : Y \to X_i$ são homomorfismos compatíveis, Sempre que Y é um grupo topológico e $\psi_i : Y \to X_i$ são homomorfismos compatíveis,existe um único homomorfismo contínuo $\psi : Y \to X$ de maneira que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\varphi_i \psi = \psi_i$.

Existência e unicidade

Teorema 4.7

O limite inverso existe e é único. Precisamente,

a) *Se* $\left(X^1, \varphi_i^1\right)$ *e* $\left(X^2, \varphi_i^2\right)$ *são limites inverso de um sistema projetivo de grupos topológicos* $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ *, então existe um isomorfismo contínuo* $\bar{\varphi} : X^1 \to X^2$ *de maneira que* $\varphi_i^2 \bar{\varphi} = \varphi_i^1$ *para cada* i*.*

Existência e unicidade

Teorema 4.7

O limite inverso existe e é único. Precisamente,

a) *Se* $\left(X^1, \varphi_i^1\right)$ *e* $\left(X^2, \varphi_i^2\right)$ *são limites inverso de um sistema projetivo de grupos topológicos* $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ *, então existe um isomorfismo contínuo* $\bar{\varphi} : X^1 \to X^2$ *de maneira que* $\varphi_i^2 \bar{\varphi} = \varphi_i^1$ *para cada* i*.*

b) *Seja*

$$X = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \varphi_{ij}(x_i) = x_j, i \succeq j\}$$

e $\varphi_i = (\pi_i)|_X$ *(*π_i *é a aplicação projeção). Então* (X, φ_i) *é um limite projetivo de* $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$*.*

Unicidade

Demonstração: a) A propriedade universal de (X^1, φ_i^1) aplicado a família φ_i^2 de aplicações compatíveis garante a existência de um homomorfismo contínuo φ^1 tal que o diagrama

Unicidade

Demonstração: $a)$ A propriedade universal de (X^1, φ_i^1) aplicado a família φ_i^2 de aplicações compatíveis garante a existência de um homomorfismo contínuo φ^1 tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^2 \arrow[r, dashed, "\varphi^1"] \arrow[dr, "\varphi_i^2"'] & X^1 \arrow[d, "\varphi_i^1"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Por outro lado, a propriedade universal de $\left(X^2, \varphi_i^2\right)$ aplicado a família φ_i^1 de aplicações compatíveis garante a existência de um homomorfismo contínuo φ^2 tal que o diagrama

Por outro lado, a propriedade universal de $\left(X^2, \varphi_i^2\right)$ aplicado a família φ_i^1 de aplicações compatíveis garante a existência de um homomorfismo contínuo φ^2 tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^1 \arrow[r, dashed, "\varphi^2"] \arrow[dr, "\varphi_i^1"'] & X^2 \arrow[d, "\varphi_i^2"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observe que $\varphi^1\varphi^2 : X^1 \to X^1$ é um isomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} X^1 \arrow[r, dashed, "\varphi^1\varphi^2"] \arrow[dr, "\varphi_i^1"'] & X^1 \arrow[d, "\varphi_i^1"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observe que $\varphi^1\varphi^2 : X^1 \to X^1$ é um isomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} X^1 \arrow[r, dashed, "\varphi^1\varphi^2"] \arrow[dr, "\varphi_i^1"'] & X^1 \arrow[d, "\varphi_i^1"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.Todavia a aplicação $id : X^1 \to X^1$ também tem essa propriedade, logo pela unicidade segue que $\varphi^1\varphi^2 = id_{X^1}$. Similarmente $\varphi^2\varphi^1 = id_{X^2}$.

Existência

$b)$ Iremos mostrar que X juntamente com as aplicações projeções $\pi_i : X \to X_i$ satisfazem a propriedade universal.

Existência

$b)$ Iremos mostrar que X juntamente com as aplicações projeções $\pi_i : X \to X_i$ satisfazem a propriedade universal.

Considere uma família de homomorfismos contínuos $\psi_i : Y \to X_i$ definidos para $i \in I$. Devemos mostrar que existe um único homomorfismo contínuo ψ tal que o diagrama abaixo é comutativo.

Existência

$b)$ Iremos mostrar que X juntamente com as aplicações projeções $\pi_i : X \to X_i$ satisfazem a propriedade universal.

Considere uma família de homomorfismos contínuos $\psi_i : Y \to X_i$ definidos para $i \in I$. Devemos mostrar que existe um único homomorfismo contínuo ψ tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\
 & X_i
\end{tikzcd}$$

Dado $y \in Y$ defina $\psi(y) := (\psi_i(y))_{i \in I}$.

Dado $y \in Y$ defina $\psi(y) := (\psi_i(y))_{i \in I}$. Observe que $(\psi_i(y))_{i \in I} \in X$ desde que

$$\varphi_{ij}\psi_i(y) = \psi_j(y), \text{ sempre que } i \succeq j.$$

Dado $y \in Y$ defina $\psi(y) := (\psi_i(y))_{i\in I}$. Observe que $(\psi_i(y))_{i\in I} \in X$ desde que

$$\varphi_{ij}\psi_i(y) = \psi_j(y), \text{ sempre que } i \succeq j.$$

Note que ψ é um homomorfismo contínuo desde que a composição com cada projeção é um homomorfismo contínuo, isto é, $\pi_i\psi = \psi_i$ para todo $i \in I$. Além disso, $\varphi_i\psi = \psi_i$ para todo $i \in I$.

Dado $y \in Y$ defina $\psi(y) := (\psi_i(y))_{i \in I}$. Observe que $(\psi_i(y))_{i \in I} \in X$ desde que

$$\varphi_{ij}\psi_i(y) = \psi_j(y), \text{ sempre que } i \succeq j.$$

Note que ψ é um homomorfismo contínuo desde que a composição com cada projeção é um homomorfismo contínuo, isto é, $\pi_i\psi = \psi_i$ para todo $i \in I$. Além disso, $\varphi_i\psi = \psi_i$ para todo $i \in I$.

Resta mostrar a unicidade de ψ.

Se $\psi' : Y \to X$ é um homomorfismo contínuo que satisfaz $\varphi_i \psi' = \psi_i$ para cada $i \in I$.

Se $\psi' : Y \to X$ é um homomorfismo contínuo que satisfaz $\varphi_i \psi' = \psi_i$ para cada $i \in I$. Tome $y \in Y$ e observe que:

$$\psi'(y) = (\varphi_i \psi'(y))_{i \in I} = (\psi_i(y))_{i \in I} = \psi(y)$$

Se $\psi' : Y \to X$ é um homomorfismo contínuo que satisfaz $\varphi_i \psi' = \psi_i$ para cada $i \in I$. Tome $y \in Y$ e observe que:

$$\psi'(y) = (\varphi_i \psi'(y))_{i \in I} = (\psi_i(y))_{i \in I} = \psi(y)$$

Portanto $\psi' = \psi$.

Se $\psi' : Y \to X$ é um homomorfismo contínuo que satisfaz $\varphi_i \psi' = \psi_i$ para cada $i \in I$. Tome $y \in Y$ e observe que:

$$\psi'(y) = (\varphi_i \psi'(y))_{i \in I} = (\psi_i(y))_{i \in I} = \psi(y)$$

Portanto $\psi' = \psi$.

Notação 4.8

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i$$

Grupos profinitos

Definição 5.1

Um grupo G é dito profinito se é igual ao limite inverso de um sistema projetivo de grupos finitos.

Grupos profinitos

Definição 5.1

Um grupo G é dito profinito se é igual ao limite inverso de um sistema projetivo de grupos finitos.

Observação 5.2

Cada grupo finito do sistema inverso é considerado um grupo topológico com topologia discreta.

Exemplo 5.3

Seja p um primo qualquer. Considere o sistema inverso de grupos finitos (aneis finitos)

$$\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{nm}, \mathbb{N}\}$$

Exemplo 5.3

Seja p um primo qualquer. Considere o sistema inverso de grupos finitos (aneis finitos)

$$\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{nm}, \mathbb{N}\}$$

onde $\varphi_{nm} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ é o epimorfismo definido por

$$\varphi_{nm}(x + p^n\mathbb{Z}) = x + p^m\mathbb{Z}$$

sempre que $n \geq m$.

Então

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

Então

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

pode ser identificado como o conjunto de todas as sequências (classes de equivalência) de números inteiros

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

tal que $a_n \equiv a_m \mod p^m$ sempre que $n \geq m$.

De fato, observe que

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \varphi_{nm}(a_n) = a_m, n \geq m\}.$$

De fato, observe que

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \varphi_{nm}(a_n) = a_m, n \geq m\}.$$

Segue que $\varphi_{nm}(a_n) = a_m \Leftrightarrow a_n + p^m\mathbb{Z} = a_m + p^m\mathbb{Z} \Leftrightarrow a_n \equiv a_m \mod p^m$, sempre que $n \geq m$.

Propriedades do limite inverso

Proposição 5.4

Seja $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ *um sistema projetivo de grupos topológicos e* $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$. *Então:*

Propriedades do limite inverso

Proposição 5.4

Seja $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ *um sistema projetivo de grupos topológicos e* $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$. *Então:*

i) *Se cada* X_i *é Hausdorff, então* X *é fechado em* $\prod_{i \in I} X_i$;

Propriedades do limite inverso

Proposição 5.4

Seja $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ *um sistema projetivo de grupos topológicos e* $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$. *Então:*

i) *Se cada* X_i *é Hausdorff, então* X *é fechado em* $\prod_{i \in I} X_i$;

ii) *Se cada* X_i *é não vazio, compacto e Hausdorff então* X *é não vazio;*

Propriedades do limite inverso

Proposição 5.4

Seja $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ *um sistema projetivo de grupos topológicos e* $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$. *Então:*

i) *Se cada* X_i *é Hausdorff, então* X *é fechado em* $\prod_{i \in I} X_i$*;*

ii) *Se cada* X_i *é não vazio, compacto e Hausdorff então* X *é não vazio;*

iii) *Os conjuntos* $\varphi_i^{-1}(U)$ *com* $i \in I$ *e* $U \subseteq_o X_i$ *formam uma base para a topologia em* X*;*

iv) Se Y é um subconjunto de X satisfazendo $\varphi_i(Y) = X_i$ para todo $i \in I$, então Y é denso em X;

iv) Se Y é um subconjunto de X satisfazendo $\varphi_i(Y) = X_i$ para todo $i \in I$, então Y é denso em X;

v) Sejam Y um espaço topológico. Uma aplicação $\theta : Y \to X$ é contínua se, e somente se, cada aplicação $\varphi_i\theta$ é contínua.

Demonstração: $i)$ Tome $i, j \in I$ tal que $i \geq j$ e defina:

$$X_{ij} = \left\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \varphi_{ij}\pi_i(x) = \pi_j(x) \right\}$$

Demonstração: $i)$ Tome $i, j \in I$ tal que $i \geq j$ e defina:

$$X_{ij} = \left\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \varphi_{ij}\pi_i(x) = \pi_j(x) \right\}$$

Pela Proposição 2.15, $iv)$ temos que X_{ij} é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$ e $\bigcap\limits_{i \geq j} X_{ij} = X$.

Demonstração: i) Tome $i, j \in I$ tal que $i \geq j$ e defina:

$$X_{ij} = \left\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \varphi_{ij}\pi_i(x) = \pi_j(x) \right\}$$

Pela Proposição 2.15, iv) temos que X_{ij} é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$ e $\bigcap_{i \geq j} X_{ij} = X$. Portanto X é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração: *ii*) Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto logo X é compacto.

Demonstração: $ii)$ Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i\in I} X_i$ é compacto logo X é compacto. Suponha que $X = \emptyset$.

Demonstração: $ii)$ Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto logo X é compacto. Suponha que $X = \emptyset$. Como $\bigcap_{i \geq j} X_{ij} = X$ segue da propriedade da interseção finita (ver Proposição 2.13) que existem índices $i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \in I$ tal que

$$\bigcap_{r=1}^{n} X_{i_r, j_r} = \emptyset.$$

Demonstração: $ii)$ Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto logo X é compacto. Suponha que $X = \emptyset$. Como $\bigcap_{i \geq j} X_{ij} = X$ segue da propriedade da interseção finita (ver Proposição 2.13) que existem índices $i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \in I$ tal que

$$\bigcap_{r=1}^{n} X_{i_r, j_r} = \emptyset.$$

Como I é um conjunto dirigido existe $k \in I$, tal que $k \geq i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n$.

Demonstração: $ii)$ Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i\in I} X_i$ é compacto logo X é compacto. Suponha que $X = \emptyset$. Como $\bigcap_{i\geq j} X_{ij} = X$ segue da propriedade da interseção finita (ver Proposição 2.13) que existem índices $i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \in I$ tal que

$$\bigcap_{r=1}^{n} X_{i_r, j_r} = \emptyset.$$

Como I é um conjunto dirigido existe $k \in I$, tal que $k \geq i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n$. Escolha $x_k \in X_k$ e defina $x_l := \varphi_{kl}(x_k)$ para $l \leq k$ para as outras entradas tome elementos arbitrários e construa $x = (..., x_l, ...x_k, ...)$.

Demonstração: *ii)* Como X_i é compacto, segue que $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto logo X é compacto. Suponha que $X = \emptyset$. Como $\bigcap_{i \geq j} X_{ij} = X$ segue da propriedade da interseção finita (ver Proposição 2.13) que existem índices $i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \in I$ tal que

$$\bigcap_{r=1}^{n} X_{i_r, j_r} = \emptyset.$$

Como I é um conjunto dirigido existe $k \in I$, tal que $k \geq i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n$. Escolha $x_k \in X_k$ e defina $x_l := \varphi_{kl}(x_k)$ para $l \leq k$ para as outras entradas tome elementos arbitrários e construa $x = (..., x_l, ...x_k, ...)$.Logo $x \in \bigcap_{r=1}^{n} X_{i_r, j_r}$. Contradição.

Demonstração:
$iii)$ Pela definição da topologia produto, para cada $U \subseteq_o X_i$ temos que $\prod_{j \neq i} X_j \times U$ é um aberto básico de $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração:
iii) Pela definição da topologia produto, para cada $U \subseteq_o X_i$ temos que $\prod_{j \neq i} X_j \times U$ é um aberto básico de $\prod_{i \in I} X_i$. Portanto

$$\varphi_i^{-1}(U) = (\prod_{j \neq i} X_j \times U) \cap X$$

é aberto básico de X.

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

logo $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$.

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

logo $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$. Suponha que $\overline{Y} \neq X$. Logo $\overline{Y}^c$ é aberto não vazio de X.

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

logo $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$. Suponha que $\overline{Y} \neq X$. Logo $\overline{Y}^c$ é aberto não vazio de X.
Segue por $iii)$ que existe $i \in I$ e $V \subseteq_o X_i$ não vazio tal que $\varphi_i^{-1}(V) \subseteq \overline{Y}^c$.

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

logo $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$. Suponha que $\overline{Y} \neq X$. Logo $\overline{Y}^c$ é aberto não vazio de X.
Segue por $iii)$ que existe $i \in I$ e $V \subseteq_o X_i$ não vazio tal que $\varphi_i^{-1}(V) \subseteq \overline{Y}^c$.Desta forma temos $\varphi_i^{-1}(V) \cap Y = \emptyset$ que gera uma contradição.

Demonstração: $iv)$ Para cada $i \in I$ e cada aberto não vazio $U \subseteq X_i$ temos que

$$\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$$

logo $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$. Suponha que $\overline{Y} \neq X$. Logo $\overline{Y}^c$ é aberto não vazio de X.
Segue por $iii)$ que existe $i \in I$ e $V \subseteq_o X_i$ não vazio tal que $\varphi_i^{-1}(V) \subseteq \overline{Y}^c$.Desta forma temos $\varphi_i^{-1}(V) \cap Y = \emptyset$ que gera uma contradição.Portanto $\overline{Y} = X$.

Demonstração: $v)$ $(\Rightarrow)$ é óbvia.

Demonstração: $v)$ $(\Rightarrow)$ é óbvia.

$(\Leftarrow)$ Suponha $\varphi_i\theta$ é contínua.

Demonstração: v) ($\Rightarrow$) é óbvia.

($\Leftarrow$) Suponha $\varphi_i\theta$ é contínua. Então para cada $i \in I$ e cada aberto U de X_i o conjunto $\theta^{-1}(\varphi_i^{-1}(U)) = (\varphi_i\theta)^{-1}(U)$ é aberto.

Demonstração: $v)$ $(\Rightarrow)$ é óbvia.

$(\Leftarrow)$ Suponha $\varphi_i\theta$ é contínua. Então para cada $i \in I$ e cada aberto U de X_i o conjunto $\theta^{-1}(\varphi_i^{-1}(U)) = (\varphi_i\theta)^{-1}(U)$ é aberto. O resultado segue pelo item $iii)$.

Caracterizando um grupo profinito

Teorema 5.5

Seja G um grupo topológico, então as seguintes condições são equivalentes.

(a) *G é um grupo profinito;*

Caracterizando um grupo profinito

Teorema 5.5

Seja G um grupo topológico, então as seguintes condições são equivalentes.

(a) *G é um grupo profinito;*

(b) *G é isomorfo a um subgrupo fechado do produto direto de grupos finitos;*

Caracterizando um grupo profinito

Teorema 5.5

Seja G um grupo topológico, então as seguintes condições são equivalentes.

(a) *G é um grupo profinito;*

(b) *G é isomorfo a um subgrupo fechado do produto direto de grupos finitos;*

(c) *G é compacto e $\bigcap_{N \triangleleft_o G} N = 1$;*

Caracterizando um grupo profinito

Teorema 5.5

Seja G um grupo topológico, então as seguintes condições são equivalentes.

(a) *G é um grupo profinito;*

(b) *G é isomorfo a um subgrupo fechado do produto direto de grupos finitos;*

(c) *G é compacto e $\bigcap_{N \triangleleft_o G} N = 1$;*

(d) *G é compacto e totalmente desconexo.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Segue da Proposição 5.4, i).

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Segue da Proposição 5.4, i).

$(b) \Rightarrow (c)$ Pela Proposição 2.12, c) segue que $\prod_{i \in I} G_i$ é compacto e pela Proposição 2.15, i) segue que G é compacto.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Segue da Proposição 5.4, i).

$(b) \Rightarrow (c)$ Pela Proposição 2.12, c) segue que $\prod_{i \in I} G_i$ é compacto e pela Proposição 2.15, i) segue que G é compacto.

Considere $K_i = Ker(\pi_i)$ onde

$$\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i$$

é a aplicação projeção.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Segue da Proposição 5.4, i).

$(b) \Rightarrow (c)$ Pela Proposição 2.12, c) segue que $\displaystyle\prod_{i \in I} G_i$ é compacto e pela Proposição 2.15, i) segue que G é compacto.

Considere $K_i = Ker(\pi_i)$ onde

$$\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i$$

é a aplicação projeção. Tome $N_i = K_i \cap G$. Como $K_i \lhd_o \prod_{i \in I} G_i$ segue que $N_i \lhd_o G$, além disso, $\cap_{i \in I} K_i = 1$

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Segue da Proposição 5.4, i).

$(b) \Rightarrow (c)$ Pela Proposição 2.12, c) segue que $\prod_{i \in I} G_i$ é compacto e pela Proposição 2.15, i) segue que G é compacto.

Considere $K_i = Ker(\pi_i)$ onde

$$\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i$$

é a aplicação projeção. Tome $N_i = K_i \cap G$. Como $K_i \triangleleft_o \prod_{i \in I} G_i$ segue que $N_i \triangleleft_o G$, além disso, $\cap_{i \in I} K_i = 1$ logo $\cap_{i \in I} N_i = 1$.

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Considere o sistema inverso $\{G/N \mid N \triangleleft_o G\}$. Defina o homomorfismo

$$\iota : G \to \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$$

por $\iota(g) = (gN)_{N \triangleleft_o G}$.

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Considere o sistema inverso $\{G/N \mid N \lhd_o G\}$. Defina o homomorfismo

$$\iota : G \to \varprojlim_{N \lhd_o G} G/N$$

por $\iota(g) = (gN)_{N \lhd_o G}$. Pela Proposição 5.4, item v) temos que ι é contínua.

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Considere o sistema inverso $\{G/N \mid N \triangleleft_o G\}$. Defina o homomorfismo

$$\iota : G \to \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$$

por $\iota(g) = (gN)_{N \triangleleft_o G}$. Pela Proposição 5.4, item v) temos que ι é contínua. Por outro lado, segue da Proposição 5.4, item iii) que $\iota(G)$ é denso em $\varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$, como G é compacto, segue que $\iota(G)$ é fechado.

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Considere o sistema inverso $\{G/N \mid N \triangleleft_o G\}$. Defina o homomorfismo

$$\iota : G \to \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$$

por $\iota(g) = (gN)_{N \triangleleft_o G}$. Pela Proposição 5.4, item v) temos que ι é contínua. Por outro lado, segue da Proposição 5.4, item iii) que $\iota(G)$ é denso em $\varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$, como G é compacto, segue que $\iota(G)$ é fechado. Portanto

$$\iota(G) = \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N.$$

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Considere o sistema inverso $\{G/N \mid N \triangleleft_o G\}$. Defina o homomorfismo

$$\iota : G \to \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$$

por $\iota(g) = (gN)_{N \triangleleft_o G}$. Pela Proposição 5.4, item v) temos que ι é contínua. Por outro lado, segue da Proposição 5.4, item iii) que $\iota(G)$ é denso em $\varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$, como G é compacto, segue que $\iota(G)$ é fechado. Portanto

$$\iota(G) = \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N.$$

Para mostrar que ι é injetora, tome $g \in G$ tal que $g \neq 1$. Tome $N \lhd_o G$ tal que $g \notin N$, segue que $\iota(g) \neq 1$.

Para mostrar que ι é injetora, tome $g \in G$ tal que $g \neq 1$. Tome $N \lhd_o G$ tal que $g \notin N$, segue que $\iota(g) \neq 1$.
Concluímos assim que

$$G \cong \varprojlim_{N \lhd_o G} G/N.$$

Para mostrar que ι é injetora, tome $g \in G$ tal que $g \neq 1$. Tome $N \triangleleft_o G$ tal que $g \notin N$, segue que $\iota(g) \neq 1$.
Concluímos assim que

$$G \cong \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N.$$

Como cada G/N é totalmente desconexo segue da Proposição 2.12, b) que $\prod_{N \triangleleft_o G} G/N$ é totalmente desconexo, logo $\varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N$ é totalmente desconexo.

Demonstração: $(d) \Rightarrow (a)$ Como G é compacto e totalmente desconexo, pela Proposição 37 a coleção de subgrupos normais abertos de G possui interseção trvial.

Demonstração: $(d) \Rightarrow (a)$ Como G é compacto e totalmente desconexo, pela Proposição 37 a coleção de subgrupos normais abertos de G possui interseção trvial. Segue que

$$G \cong \varprojlim_{N \triangleleft_o G} G/N.$$

Teorema 5.6

Seja G um grupo profinito, então:

(a) *Todo grupo quociente G/K, onde $K \lhd_c G$, é um grupo profinito;*

Teorema 5.6

Seja G um grupo profinito, então:

(a) *Todo grupo quociente G/K, onde $K \triangleleft_c G$, é um grupo profinito;*

(b) *O produto direto $\prod_{i \in I} G_i$ de qualquer coleção $\{G_i \mid i \in I\}$ de grupos profinitos com topologia produto é um grupo profinito;*

Teorema 5.6

Seja G um grupo profinito, então:

(a) *Todo grupo quociente G/K, onde $K \triangleleft_c G$, é um grupo profinito;*

(b) *O produto direto $\prod_{i\in I} G_i$ de qualquer coleção $\{G_i \mid i \in I\}$ de grupos profinitos com topologia produto é um grupo profinito;*

(c) *Um subgrupo H de G com topologia induzida é profinito se, e somente se, H é fechado.*

Demonstração: (a) Segue da Proposição 37 que $K = \bigcap_{U \lhd_o G} KU$. Portanto $G/K = \varprojlim_{U \lhd_o G} G/KU$ logo G/K é profinito.

Demonstração: (a) Segue da Proposição 37 que $K = \bigcap_{U \lhd_o G} KU$. Portanto $G/K = \varprojlim_{U \lhd_o G} G/KU$ logo G/K é profinito.

(b) Segue da Proposição 2.12 que $\prod_{i \in J} G_i$ é compacto e totalmente desconexo, logo é profinito.

Demonstração: (c) Se H é fechado, H é compacto e totalmente desconexo, então H é profinito. Se H é compacto então H é fechado.

Completamento profinito

Sejam G um grupo abstrato e $\mathcal{N}$ a coleção dos subgrupos normais $N \triangleleft G$ tal que G/N é finito.

Completamento profinito

Sejam G um grupo abstrato e $\mathcal{N}$ a coleção dos subgrupos normais $N \triangleleft G$ tal que G/N é finito.Observe que $\mathcal{N}$ é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão:

Dados $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, temos que $N_1 \preceq N_2$ se, e somente se, $N_2 \leq N_1$.

Completamento profinito

Sejam G um grupo abstrato e $\mathcal{N}$ a coleção dos subgrupos normais $N \triangleleft G$ tal que G/N é finito.Observe que $\mathcal{N}$ é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão:

Dados $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, temos que $N_1 \preceq N_2$ se, e somente se, $N_2 \leq N_1$.

Portanto G será um grupo topológico se considerarmos

$$\tau_{\mathcal{N}} = \{gN \mid N \in \mathcal{N}, g \in G\}$$

uma base para a topologia em G (topologia profinita).

Tome $M, N \in \mathcal{N}$ tal que $N \succeq M$. Considere o epimorfismo natural

$$\varphi_{NM} : G/N \longrightarrow G/M.$$

Tome $M, N \in \mathcal{N}$ tal que $N \succeq M$. Considere o epimorfismo natural

$$\varphi_{NM} : G/N \longrightarrow G/M.$$

Então $\{G/N, \varphi_{NM}\}$ define um sistema inverso de grupos grupos finitos.

Tome $M, N \in \mathcal{N}$ tal que $N \succeq M$. Considere o epimorfismo natural

$$\varphi_{NM} : G/N \longrightarrow G/M.$$

Então $\{G/N, \varphi_{NM}\}$ define um sistema inverso de grupos grupos finitos. O completamento profinito de G com respeito a essa toplogia é definido da seguinte maneira:

Tome $M, N \in \mathcal{N}$ tal que $N \succeq M$. Considere o epimorfismo natural

$$\varphi_{NM} : G/N \longrightarrow G/M.$$

Então $\{G/N, \varphi_{NM}\}$ define um sistema inverso de grupos grupos finitos. O completamento profinito de G com respeito a essa toplogia é definido da seguinte maneira:

$$\widehat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

Observe que existe um homomorfismo contínuo natural

$$\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$$

induzido pela epimorfismo natural

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N \qquad (N \in \mathcal{N})$$

a saber $\iota(g) = (gN)_{N \in \mathcal{N}}$.

Observe que existe um homomorfismo contínuo natural

$$\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$$

induzido pela epimorfismo natural

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N \qquad (N \in \mathcal{N})$$

a saber $\iota(g) = (gN)_{N \in \mathcal{N}}$. Além disso $\iota(G)$ é um subconjunto denso em $\widehat{G}$ e ι é injetiva se, e somente se, $\displaystyle\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$, isto é, G é residualmente finito.

Observação 6.1

Se G é um grupo finito então a topologia profinita em G é igual a topologia discreta, além disso,

Observação 6.1

Se G é um grupo finito então a topologia profinita em G é igual a topologia discreta, além disso, $\widehat{G} = G$.

Observação 6.1

Se G é um grupo finito então a topologia profinita em G é igual a topologia discreta, além disso, $\widehat{G} = G$. Em outras palavras, todo grupo finito é grupo topológico com topologia discreta e grupo profinito também.

Propriedade universal

Lemma 6.2

Sejam G um grupo e $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais de índice finito em G. Considere o homomorfismo contínuo natural

$$\iota : G \longrightarrow \hat{G}$$

definido por $\iota(g) = (gN)_{N \in \mathcal{N}}$. Assim a seguinte propriedade universal é satisfeita:

Propriedade universal

Lemma 6.2

Sejam G um grupo e $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais de índice finito em G. Considere o homomorfismo contínuo natural

$$\iota : G \longrightarrow \hat{G}$$

definido por $\iota(g) = (gN)_{N\in\mathcal{N}}$. Assim a seguinte propriedade universal é satisfeita:
Sejam H um grupo profinito e $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo contínuo. Então existe um homomorfismo contínuo $\bar{\varphi} : \hat{G} \longrightarrow H$ tal que $\bar{\varphi}\iota = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{G} \arrow[drr, dotted, "\bar{\varphi}"] & & \\
G \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \hat{G} \arrow[dr, dotted, "\bar{\varphi}"] & \\ G \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo contínuo sobre um grupo profinito H. Considere também o conjunto $\mathcal{U} = \{U \mid U \triangleleft_o H\}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ defina $N_U = \varphi^{-1}(U)$.

Existe uma composição natural de homomorfismos contínuos π_U e ψ_U onde

$$\pi_U : \hat{G} \longrightarrow G/N_U$$

é a projeção natural, e

$$\psi_U : G/N_U \longrightarrow H/U$$

$\psi_U(gN_U) = \varphi(g)U$. Para tanto, defina $\varphi_{N_U} = \psi_U \pi_U$.

Existe uma composição natural de homomorfismos contínuos π_U e ψ_U onde

$$\pi_U : \hat{G} \longrightarrow G/N_U$$

é a projeção natural, e

$$\psi_U : G/N_U \longrightarrow H/U$$

$\psi_U(gN_U) = \varphi(g)U$. Para tanto, defina $\varphi_{N_U} = \psi_U \pi_U$.

$$\varphi_{N_U} : \hat{G} \longrightarrow G/N_U \longrightarrow H/U$$

Considere o conjunto de aplicações φ_{N_U} $(U \in \mathcal{U})$ que são compatíveis, logo definem um homomorfismo contínuo

$$\bar{\varphi} : \hat{G} \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} H/U = H$$

Considere o conjunto de aplicações φ_{N_U} $(U \in \mathcal{U})$ que são compatíveis, logo definem um homomorfismo contínuo

$$\bar{\varphi} : \hat{G} \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} H/U = H$$

tal que $\bar{\pi}_U \bar{\varphi} = \varphi_{N_U}$ onde

$$\bar{\pi}_U : H \longrightarrow H/U$$

é a projeção natural.

Considere o conjunto de aplicações φ_{N_U} $(U \in \mathcal{U})$ que são compatíveis, logo definem um homomorfismo contínuo

$$\bar{\varphi} : \hat{G} \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} H/U = H$$

tal que $\bar{\pi}_U \bar{\varphi} = \varphi_{N_U}$ onde

$$\bar{\pi}_U : H \longrightarrow H/U$$

é a projeção natural. Desta forma temos que
$\bar{\varphi}\iota(g) = \bar{\varphi}((gU)_{U \in \mathcal{N}}) = \varphi(g)$ para todo $g \in G$.

Considere o conjunto de aplicações φ_{N_U} $(U \in \mathcal{U})$ que são compatíveis, logo definem um homomorfismo contínuo

$$\bar{\varphi} : \hat{G} \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} H/U = H$$

tal que $\bar{\pi}_U \bar{\varphi} = \varphi_{N_U}$ onde

$$\bar{\pi}_U : H \longrightarrow H/U$$

é a projeção natural. Desta forma temos que $\bar{\varphi}\iota(g) = \bar{\varphi}((gU)_{U \in \mathcal{N}}) = \varphi(g)$ para todo $g \in G$.Logo $\bar{\varphi}\iota = \varphi$.

Definição 7.1

Sejam G um grupo profinito e X um subconjunto de G. Dizemos que X gera G topologicamente se $G = \overline{\langle X \rangle}$. Um grupo profinito G é dito finitamente gerado se G contém um subconjunto X finito que gera G.

Definição 7.1

Sejam G um grupo profinito e X um subconjunto de G. Dizemos que X gera G topologicamente se $G = \overline{\langle X \rangle}$. Um grupo profinito G é dito finitamente gerado se G contém um subconjunto X finito que gera G.

Notação 7.2

Se G é um grupo profinito finitamente gerado então denotamos por $d(G)$ a cardinalidade do menor conjunto que gera G topologicamente.

Definição 7.1

Sejam G um grupo profinito e X um subconjunto de G. Dizemos que X gera G topologicamente se $G = \overline{\langle X \rangle}$. Um grupo profinito G é dito finitamente gerado se G contém um subconjunto X finito que gera G.

Notação 7.2

Se G é um grupo profinito finitamente gerado então denotamos por $d(G)$ a cardinalidade do menor conjunto que gera G topologicamente.

Exemplo 7.3

Observe que $\widehat{\mathbb{Z}}$ é um grupo profinito 1-gerado.

Teorema 7.4

(Propriedade de Hopf) Seja G um grupo profinito finitamente gerado e $\varphi : G \longrightarrow G$ um epimorfismo, então φ é um isomorfismo.

Teorema 7.4

(*Propriedade de Hopf*) *Seja G um grupo profinito finitamente gerado e $\varphi : G \longrightarrow G$ um epimorfismo, então φ é um isomorfismo.*

Teorema 7.5

Seja $\{G_i, \varphi_i, I\}$ um sistema inverso de grupos finitos sobrejetor.

Teorema 7.4

(Propriedade de Hopf) Seja G um grupo profinito finitamente gerado e $\varphi : G \longrightarrow G$ um epimorfismo, então φ é um isomorfismo.

Teorema 7.5

Seja $\{G_i, \varphi_i, I\}$ um sistema inverso de grupos finitos sobrejetor.Defina

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i.$$

Então $d(G) < \infty$ se, e somente se, $\{d(G_i) \mid i \in I\}$ é um conjunto limitado; neste caso existe existe $i_0 \in I$ tal que $d(G) = d(G_{i_0})$ para cada $j \succeq i_0$.

Teorema de Gaschütz

Teorema 7.6

Sejam G e H grupos profinitos finitamente gerados e considere

$$\psi : G \longrightarrow H$$

um epimorfismo contínuo.

Teorema de Gaschütz

Teorema 7.6

Sejam G e H grupos profinitos finitamente gerados e considere

$$\psi : G \longrightarrow H$$

um epimorfismo contínuo.Assuma que $d(G) \leq d$ e sejam $z_1, ..., z_d$ elementos de H (possivelmente com repetição) que geram H. Então existem $g_1, ..., g_d$ em G tal que $G = \overline{\langle g_1, ..., g_d \rangle}$ e $\psi(g_i) = z_i$ para todo $i = 1, ..., d$.

Teorema 7.7

Seja G um grupo profinito finitamente gerado e U um subgrupo aberto de G. Então U é finitamente gerado.

Teorema 7.8

Seja G um grupo topológico residualmente finito. Identificamos G no seu completamento profinito $\widehat{G}$. Se $\bar{X}$ representa o fecho de $X \subset G$ em $\widehat{G}$.

Teorema 7.8

Seja G um grupo topológico residualmente finito. Identificamos G no seu completamento profinito $\widehat{G}$. Se $\bar{X}$ representa o fecho de $X \subset G$ em $\widehat{G}$.

a) *Considere*

$$\Psi : \{N \mid N \leq_o G\} \to \left\{U \mid U \leq_o \widehat{G}\right\}$$

a aplicação que leva cada subgrupo aberto H de G no seu fecho $\bar{H}$ em $\widehat{G}$.

Teorema 7.8

Seja G um grupo topológico residualmente finito. Identificamos G no seu completamento profinito $\widehat{G}$. Se $\bar{X}$ representa o fecho de $X \subset G$ em $\widehat{G}$.

a) *Considere*

$$\Psi : \{N \mid N \leq_o G\} \to \left\{U \mid U \leq_o \widehat{G}\right\}$$

a aplicação que leva cada subgrupo aberto H de G no seu fecho $\bar{H}$ em $\widehat{G}$. Então Ψ é bijetora e sua inversa é dada por $\Psi^{-1} : U \to G \cap U$, em particular $\overline{U \cap G} = U$.

b) A aplicação Ψ leva subgrupo normal de G para subgrupo normal de $\widehat{G}$.

b) A aplicação Ψ leva subgrupo normal de G para subgrupo normal de $\widehat{G}$.

c) Se $H, K \in \{N \mid N \leq_o G\}$ e $H \leq K$ então

$$[K : H] = \left[\bar{K} : \bar{H}\right].$$

Além disso, se $H \triangleleft K$ vale $H/K \cong \bar{H}/\bar{K}$.

b) A aplicação Ψ leva subgrupo normal de G para subgrupo normal de $\widehat{G}$.

c) Se $H, K \in \{N \mid N \leq_o G\}$ e $H \leq K$ então

$$[K : H] = \left[\bar{K} : \bar{H}\right].$$

Além disso, se $H \triangleleft K$ vale $H/K \cong \bar{H}/\bar{K}$.

d) Se $H, K \in \{N \mid N \leq_o G\}$ então $\overline{H \cap K} = \bar{H} \cap \bar{K}$.

Teorema 7.9

Sejam G_1 e G_2 grupos abstratos finitamente gerados. Suponha que G_1 e G_2 tenham os mesmos quocientes finitos, isto é,

$$\{G_1/N \mid N \triangleleft_f G_1\} = \{G_2/N \mid N \triangleleft_f G_2\}.$$

Teorema 7.9

Sejam G_1 e G_2 grupos abstratos finitamente gerados. Suponha que G_1 e G_2 tenham os mesmos quocientes finitos, isto é,

$$\{G_1/N \mid N \triangleleft_f G_1\} = \{G_2/N \mid N \triangleleft_f G_2\}.$$

Então $\widehat{G_1} \cong \widehat{G_2}$.

Referências

- L. Ribes, P.A. Zalesskii, Profinite Groups, Springer-Verlag, **40**, 2nd ed., Berlin, 2010.
- J.S. Wilson, Profinite Groups, Clarendon Press, New York, 1998.
- E.L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Editora SBM, 2009.