

GUEMAEL RINALDI LATTANZI

NÓS LEGENDREANOS E SEUS INVARIANTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013**

GUEMAEL RINALDI LATTANZI

NÓS LEGENDREANOS E SEUS INVARIANTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 31 de Julho de 2013.

Enoch Humberto Apaza Calla

Oziride Manzoli Neto

Simone Maria de Moraes
(Orientador)

*“Sabe o que te acontecerá praticando desenho a pena?
Tornate-as prático, perito e capaz de muitos desenhos dentro de sua mente.”*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a meus pais Lourenço e Tânia pois sem eles este trabalho não seria possível e aos meus irmãos George, Gabriel e Gustavo que mesmo sem saber tiveram participações nesta jornada.

A Ana, minha companheira por me apoiar sempre que possível.

A Simone por ter me orientado, pelo conhecimento ensinado, pelos créditos debitados e pelo apoio durante todo o mestrado.

Aos meus amigos de graduação, em especial o Fernando (Kray) que me acompanhou em muitas loucuras, aos amigos de sempre Carlos, Maru, Jump e etc. A todos os amigos que fiz em Viçosa, Bruxão, Fred, Isaque, Anna Paula, Alinão, Priscila, Samarão, Bruno, Débora, Marcelo, Lucas, Sabrina, Dudu, Alanas, Maks, Victor, Micheles, Carlos, Rondinei, Reno, Gustavo, Alan, Livia e claro Thiago e Paulinha.

A todos aqueles que de alguma forma fizeram parte, e provavelmente pela falta de memória não estão nestas linhas.

Agradeço ainda a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

LATTANZI, Guemael Rinaldi, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2013. **Nós Legendreanos e seus Invariantes**. Orientador: Simone Maria de Moraes.

Neste trabalho, estudaremos os invariantes clássicos da Teoria de Nós Legendreanos e mostraremos que estes não são completos. Para tal introduzimos uma noção básica da Teoria de Nós Legendreanos, assim como seus invariantes clássicos, o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov. Em seguida discutiremos uma nova ferramenta desenvolvida por Chekanov, a Álgebra Diferencial Graduada, denotada por DGA (*Differential Graduated Algebra*), que nos auxiliará na prova da incompletude dos invariantes clássicos de nós legendreanos.

Abstract

LATTANZI, Guemael Rinaldi, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July 2013.
Legendrian Knots and their Invariants. Adviser: Simone Maria de Moraes.

In this work, we study the classical invariants of Legendrian Knots Theory and we show that these are not complete. To do this we introduce a notion of a Basic Knot Theory like their classical invariants, Thurston-Bennequin number and Maslov number. Then we discuss a new tool developed by Chekanon and denoted by DGA (Differential Graded Algebra), which will help us in the proof of the incompleteness of classical invariants of Legendrian knots.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução a Teoria dos Nós	3
1.1 Definições Básicas	4
1.1.1 Movimentos de Reidemeister	7
1.2 Nós Orientados, Compostos, Primos e Reflexivos	9
1.3 Invariantes Clássicos	13
1.3.1 Tricolorabilidade	13
1.3.2 Polinômio de Alexander	16
1.3.3 Polinômio de Conway	19
1.3.4 Polinômio de Jones	23
1.4 Invariantes de Vassiliev	26
1.4.1 Nós singulares e relação skein de Vassiliev	26
1.4.2 Invariantes de Vassiliev de graus 0, 1 e 2	31
2 Nós Legendreanos e seus Invariantes Clássicos	35
2.1 Estruturas de Contato	36
2.2 Nós Legendreanos	42
2.2.1 Movimentos de Reidemeister para Nós Legendreanos	47
2.3 Número de Thurston-Bennequin e número de Maslov	49

3 Invariantes Combinatórios de nós legendreanos	55
3.1 DGA - Álgebra Diferencial Graduada	56
Conclusão	69

Introdução

A Teoria clássica de Nós estuda curvas fechadas e sem intersecção mergulhadas no 3-espaço euclidiano.

Uma 3-variedade de contato é o \mathbb{R}^3 munido de uma estrutura de contato, que é um tipo especial de campo, assim como um campo vetorial associa um vetor a cada ponto, um campo de planos associa um plano a cada ponto.

Com o crescente avanço da Geometria de Contato, nos últimos anos começaram a surgir trabalhos sobre a Teoria de Nós Legendreanos e de Nós Transversos, que são duas classes especiais de nós em uma 3-variedade de contato.

Assim como na teoria de nós clássicos os trabalhos científicos procuram encontrar invariantes topológicos. No caso dos nós legendreanos, que são objeto de estudo deste trabalho, a pergunta que se procura responder é a seguinte:

“Quando dois nós legendreanos têm o mesmo tipo de isotopia legendreana?”

O primeiro trabalho buscando a classificação das classes de nós legendreanos, de Eliashber e Fraser, foi publicado em 1995, demonstrando que os invariantes clássicos determinam a classe de isotopia legendreana do nó trivial.

Na atualidade vários matemáticos têm se dedicado ao estudo de nós legendreanos, dos quais destacamos os trabalhos de Etnyre [9], Ferrand [11], Ng [17] e Chekanov [5], inclusive nesta teoria há vários problemas em aberto.

Até 2002 não havia mecanismo para garantir a completude ou não dos invariantes clássicos, neste mesmo ano o matemático Chekanov desenvolveu um invariante legendreano, uma álgebra diferencial graduada associada a nós legendreanos em [5]. Neste artigo Chekanov apresenta o primeiro exemplo de dois nós legendreanos com mesmo par de invariantes clássicos, porém não legendreaneamente isotópicos.

O trabalho de Chekanov foi um divisor de águas na teoria de nós legendreanos, após o seu trabalho outros pesquisadores passaram a obter resultados utilizando

a álgebra DGA (veja [20], [10] e [14]).

Até o momento não foi obtido resultado algum sobre a completude do DGA e a teoria de nós legendreanos segue em fervência científica.

Esta dissertação se dedica ao estudo dos nós legendreanos e seus invariantes e nosso principal objetivo será analisar os invariantes clássicos desta teoria, o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov e mostrar que estes invariantes não são completos, isto é, mostrar que existem nós com um mesmo par de invariantes clássicos que não são legendreanamente isotópicos.

Iniciamos o capítulo 1 com uma introdução à teoria de nós clássicos, apresentamos as noções básicas da Teoria de Nós e alguns de seus invariantes. Finalizamos o capítulo com os invariantes do tipo finito ou invariantes de Vassiliev para nós.

No capítulo 2 introduzimos as ferramentas básicas da Teoria de Contato, para em seguida a 3-variedade de contato canônica e definir os nós legendreanos. Também estudamos as projeções de nós legendreanos e introduzimos o conceito de isotopia legendreana de nós. Finalizamos o capítulo apresentando os invariantes clássicos, número de Thurston-Bennequin e número de Maslov, para nós legendreanos.

Finalizamos o trabalho, no capítulo 3, estudando invariantes combinatórios de nós legendreanos. Aqui nosso objetivo é estabelecer a álgebra diferencial graduada (DGA) associada a um nó legendreano e utilizando a graduação desta álgebra apresentar o exemplo de Chekanov mostrando assim a incompletude dos invariantes clássicos.

Capítulo 1

Introdução a Teoria dos Nós

A Teoria de Nós teve sua primeira aparição através de um conceito físico para modelos atômicos, pouco tempo depois constata-se que este conceito físico estava errado, a partir daí esta teoria passou a ser um objeto de estudo de matemáticos.

Atualmente temos suas aplicações em vários campos da Física, Química e Biologia.

A primeira referência matemática aos nós surge no século 18, através de um matemático francês chamado Alexander Theophile Vondermand (1735-1796).

Carl Friederich Gauss (1777-1855) faz a primeira referência a teoria de nós que conhecemos atualmente, os trabalhos de Gauss inspiraram muitos matemáticos e assim inicia-se uma tentativa de classificar todos os nós, e aparecem assim os primeiros invariantes polinomiais.

James Waddel Alexander (1888-1971) em 1928 introduz o primeiro invariante polinomial para nós, que ficou conhecido como polinômio de Alexander. Em torno dos anos 60, o matemático inglês John Conway desenvolve um outro invariante polinomial para nós, este baseado nas ideias de Alexander mas definido de uma maneira recursiva, este invariante ficou conhecido como Polinômio de Conway. Em maio de 1984 temos o surgimento de outro invariante polinomial associado a nós, o Polinômio de Jones desenvolvido por Vaughan Jones, em agosto do ano seguinte surge o Polinômio de Kauffman, invariante desenvolvido pelo matemático Louis H. Kauffman.

Já na década de 90, Victor Vassiliev introduz uma abordagem diferente dos invariantes conhecidos até então, e defini um invariante utilizando, ao invés dos diagramas de um nó, o espaço de todas as aplicações $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A Teoria de Nós se desenvolveu muito desde seu aparecimento, mas a seguinte questão ainda permanece em aberto:

“Será que podemos estabelecer um sistema de invariantes completos e eficientes que nos permitem classificar todos os nós?”

Neste capítulo veremos as noções básicas da teoria de nós, sua definição e os principais teoremas.

As referências para o estudo deste capítulo são [1], [2], [3], [4], [7], [8], [16] e [22].

Um nó é uma curva fechada e sem auto-interseções em \mathbb{R}^3 , intuitivamente podemos pensar em um nó como um entrelaçado de uma linha em \mathbb{R}^3 cuja as pontas estão conectadas.

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1. *Uma aplicação f contínua e injetiva é dita um **mergulho**.*

Definição 1.2. *Seja f uma aplicação contínua e injetiva do círculo S^1 em \mathbb{R}^3 , dizemos que $K = \text{Im}f(S^1)$ é um **nó**. A aplicação f é dita um **mergulho**.*

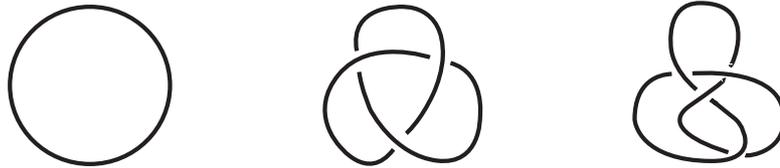


Figura 1.1: Nós: Trivial; Trefoil e Figura Oito

Observação: A aplicação f da definição 1.2 é um mergulho.

Por definição os nós são um caso particulares de curvas fechadas em \mathbb{R}^3 , e para estudá-los faz-se necessário uma maneira de os representarmos, para isso utilizaremos uma projeção bastante conveniente, a qual chamaremos de **diagrama**. Dado um certo nó K , denotaremos seu diagrama por D_K . Podemos pensar que o diagrama de um nó é sua sombra projetada em um plano, com o acréscimo da informação de qual arco passa por baixo, tal informação se dá ao interrompermos o desenho da curva pouco antes do cruzamento, além disso essa projeção deve respeitar as seguintes regras:

- Cada cruzamento ocorre em apenas um ponto.
- O número de cruzamentos deve ser finito.

A figura 1.2 nos mostra como deve ser a projeção de um nó.



Figura 1.2: Diagrama do nó figura oito

Observando o diagramas vistos na figura 1.1 podemos notar que a quantidade de cruzamentos é igual a quantidade de arcos, por exemplo, o nó figura oito possui quatro cruzamentos e quatro arcos, esta igualdade se verifica para todos diagramas de nós.

Todo diagrama de um nó com menos de oito cruzamentos pode ser modificado de modo a conseguirmos a particularidade de que seus arcos passam por cima e por baixo, alternadamente. Quando o diagrama estiver nesta forma dizemos que este diagrama é **alternado**.

Definição 1.3. *O diagrama de um nó diz-se **alternado** se a medida que o percorremos encontramos alternadamente, cruzamentos por cima e cruzamentos por baixo.*

Existem nós que podem ser representados tanto por um diagrama alternado ou por um diagrama não alternado, como é o caso do nó da figura 1.3.



Figura 1.3: Diagrama alternado e não alternado do nó figura oito.

Mas também existem nós que não podem ser representados por diagramas alternados, como mostra a figura 1.4.

Observe que é possível transformar o nó trefoil no nó trivial, cortando o nó trefoil num ponto e o conectando de maneira conveniente, porém este corte não se dá de maneira contínua em \mathbb{R}^3 , se este corte fosse efetuado de maneira contínua, todos os nós seriam equivalentes ao trivial. Quando pudermos transformar um nó K_1 em um nó K_2 de maneira contínua dizemos que estes nós são **isotópicos**.

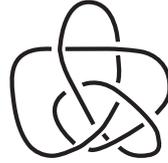


Figura 1.4: Diagrama não alternado de um nó.

Definição 1.4. *Sejam f, g dadas por*

$$\begin{array}{ccc} f : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

*aplicações contínuas. Dizemos que f e g são **homotópicas** se, e somente se, existe*

$$\begin{array}{ccc} H : I \times X & \rightarrow & Y \\ (t, x) & \mapsto & H(t, x) \end{array}$$

*uma aplicação contínua tal que $H|_{\{0\} \times X} = f$ e $H|_{\{1\} \times X} = g$. A aplicação H é chamada **homotopia** entre as aplicações f e g .*

Definição 1.5. *Sejam f e g dadas por*

$$\begin{array}{ccc} f : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

*aplicações contínuas. Dizemos que f e g são **isotópicas** se, e somente se, $H : I \times X \rightarrow Y$ homotopia entre f e g é tal que, $H|_{\{t\} \times X}$ é um homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$.*

Definição 1.6. *Dois nós K_1 e K_2 são ditos **ambiente isotópicos** se existe uma aplicação*

$$H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $h_t = H|_{\mathbb{R}^3 \times \{t\}}$ é um homeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$, com $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$ e $h_1(K_1) = K_2$

Neste texto usaremos apenas as isotopias do tipo ambiente, desta forma até o fim deste capítulo, vamos nos referir a tal, apenas por isotopia.

Uma isotopia pode desfazer cruzamentos e mudar sua disposição, mas não pode inverter a posição de dois segmentos num cruzamento, fazendo quem passa por baixo passar por cima, se isso fosse possível transformaríamos qualquer curva num círculo.

A principal questão da teoria de nós é julgar quando dois nós são ou não isotópicos, para isso, no próximo capítulo estudaremos alguns dos principais invariantes da teoria de nós, a tricolorabilidade, o polinômio de Alexander, o polinômio de Conway, o polinômio de Jones e os invariantes de Vassiliev. A figura a seguir nos mostra que o nó figura oito é isotópico a sua imagem espelhada. Observe ainda que todos os movimentos efetuados se dão de maneira contínua.

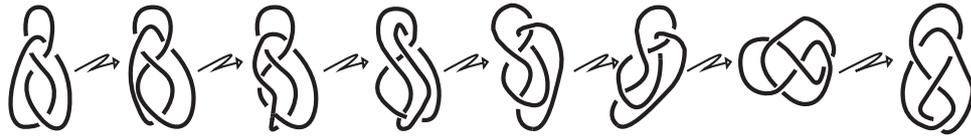


Figura 1.5: Exemplo de Isotopia

O conceito de isotopia satisfaz a definição de relação de equivalência, isto é, dois nós são isotópicos se estiverem na mesma classe de equivalência, se não forem isotópicos então não pertencem a mesma classe de equivalência, é por isso que quando nos referimos a um nó estamos nos referindo a um representante de uma classe de equivalência por isotopia. Observando a figura 1.6 é fácil ver que podemos transformar o diagrama de K_2 em K_1 , apenas desdobrando o diagrama de K_2 .

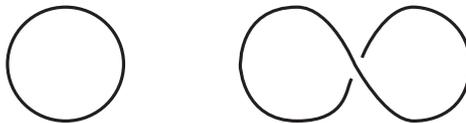


Figura 1.6: Nó trivial K_1 e nó trivial K_2

Este desdobramento é um movimento contínuo em \mathbb{R}^2 , sendo assim uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte:

“Quais são os tipos de movimentos contínuos que podemos fazer sobre um diagrama afim de verificar se estes respectivos nós são isotópicos?”

Kurt Reidemeister (1893-1971) respondeu essa questão definindo os possíveis movimentos contínuos que podemos efetuar sobre um nó.

1.1.1 Movimentos de Reidemeister

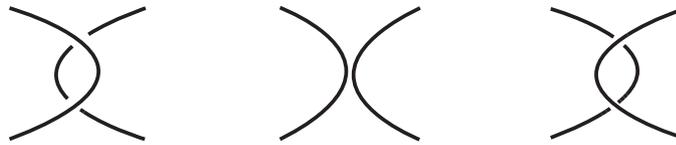
Definição 1.7 (Reidemeister). *Os **movimentos de Reidemeister** são uma forma de alterarmos o diagrama de um nó, permitindo assim deformar os arcos e alterar a relação entre os cruzamentos.*

$[R_0]$ Movimento simples que permite arrastar ou puxar os arcos sem que se alterem os cruzamentos.

$[R_1]$ Movimento que introduz ou remove uma torção no diagrama:



$[R_2]$ Movimento que introduz ou remove dois cruzamentos, desde que um dos arcos passe sempre por cima ou por baixo do outro.



$[R_3]$ Movimento que faz passar um dos arcos por cima ou por baixo de determinado cruzamento.



O seguinte teorema nos garante que se pudermos transformar o diagrama de um nó em outro, através de movimentos de Reidemeister então estes nós são isotópicos. Para ver a demonstração consulte [16].

Teorema 1.8. *Dois nós K_1 e K_2 são isotópicos se qualquer diagrama de K_1 (K_2) puder ser transformado no diagrama de K_2 (K_1) por uma sucessão finita de movimentos de Reidemeister.*

Como consequência imediata deste teorema temos o seguinte corolário:

Corolário 1.9. *Dois nós com mesmo diagrama são isotópicos.*

Com o entendimento do teorema 1.8, fica claro que o nó figura oito é isotópico a sua imagem espelhada, já que todos os movimentos que efetuamos para transformar um no outro, são movimentos de Reidemeister. Os movimentos de Reidemeister definem implicitamente sobre os nós, uma classe de equivalência (via

isotopias). Porém nem sempre é fácil dizer se dois nós são ou não isotópicos utilizando apenas estes movimentos, e é assim que introduzimos uma questão muito importante na teoria de nós:

“Quando dois diagramas de nós são isotópicos?”

Esta pergunta não é facilmente respondida, para isso teremos um capítulo exclusivo, onde estudaremos os invariantes clássicos da Teoria de Nós.

1.2 Nós Orientados, Compostos, Primos e Reflexivos

Definição 1.10. *Sejam K_1 e K_2 dois nós arbitrários, podemos obter um nó K_3 cortando K_1 e K_2 em um arco e conectando suas respectivas pontas, o nó obtido é chamado de **nó composto**, e a operação que une os dois iniciais, é chamada **soma conexa** e é denotada por $K_1 \# K_2$.*

É importante notar que este corte não pode ser efetuado em qualquer ponto do diagrama de um nó, é necessário respeitar as seguintes condições:

1. O segmento não pode conter nenhum cruzamento.
2. O segmento se localize na parte exterior do diagrama.
3. Ao removermos um segmento, deve ser possível reconstruí-lo sem inserir cruzamentos no diagrama.

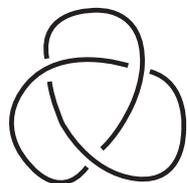


Figura 1.7: K_1



Figura 1.8: K_2



Figura 1.9: $K_1 \# K_2$

Definição 1.11. *O nó resultante de uma soma conexa de dois nós não triviais, é dito um **nó composto**. Os nós que constituem um nó composto são chamados de **nós fatores**.*

Observe que se fizermos a soma conexa de um nó qualquer com o nó trivial, o primeiro não se altera, grosseiramente falando, o nó trivial funciona como elemento neutro durante a soma conexa.

Se nos pusermos a pensar a respeito da soma conexa entre dois nós, a seguinte pergunta pode vir a tona:

“Dados dois diagramas de nós, a escolha do segmento onde efetuaremos o corte nos dá um mesmo nó composto?”

A resposta a essa pergunta é surpreendente, e por mais estranho que possa parecer é negativa, é possível construirmos nós distintos fazendo a soma conexa de um mesmo par de nós. Antes de mais nada, vamos introduzir a noção de orientação em nós.

A orientação é definida pela escolha do sentido que percorre continuamente o vetor tangente a cada ponto do nó.

Definição 1.12. *Um diagrama de nó é dito **orientado** quando corresponde a um nó orientado.*

Podemos representar a orientação de um nó adicionando ao seu diagrama uma seta.

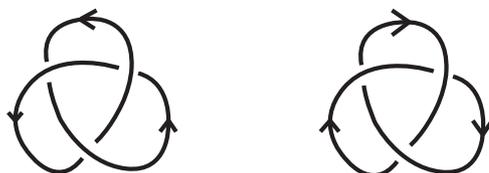


Figura 1.10: Diagrama do nó trefoil com suas respectivas orientações.

Ao orientarmos um nó podemos definir os cruzamentos de seu diagrama como **positivo** ou **negativo**, fazemos isso de acordo com a figura a seguir:

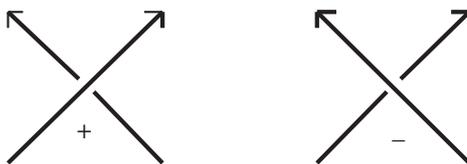


Figura 1.11: Sinais de um cruzamento.

A importância de adicionarmos orientação e por sua vez, sinais aos cruzamentos ficará bastante clara no próximo capítulo, quando estudaremos os invariantes clássicos da Teoria de Nós. Observe no exemplo a seguir que a mudança de orientação no diagrama de um nó não influencia no sinal dos cruzamentos.

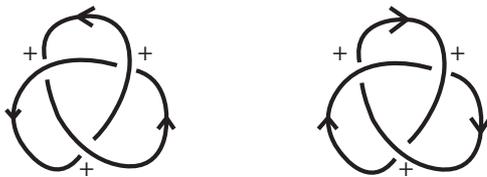


Figura 1.12: Sinal dos cruzamentos de dois diagrams do nó trefoil.

Voltemos agora à questão de exibir um exemplo de somas conexa, obtidas de nós fatores, porém não isotópicos.

Quando fazemos a soma conexa de dois nós orientados J e K , temos duas possibilidades, J e K possuem a mesma orientação e portanto $J\#K$ terá esta orientação ou J e K possuem orientações contrárias. Todas as composições onde as orientações correspondem, produzem um mesmo nó composto.

Definição 1.13. Um nó orientado K é dito *invertível* se é isotópico a $-K$, isto é, se é isotópico a si mesmo com orientação invertida.

Um exemplo de nó invertível é o nó trefoil T , pois com uma sucessão de movimentos de Reidemeister é possível transformar o diagrama D_T no diagrama D_{-T} de $-T$.

Nos anos 60 não eram conhecidos nós não invertíveis, porém em 1964 H. F. Trotter criou uma família infinita de nós não invertíveis, a seguir temos o diagrama do nó Kawaushi, o nó não invertível com menor número de cruzamentos.

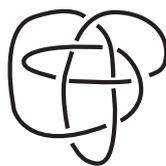


Figura 1.13: Diagrama de um nó não invertível.

Em geral, dizer se um determinado nó, é ou não invertível não é uma tarefa fácil e até então não temos uma técnica geral para tal determinação, o fato de um nó ser ou não invertível nos dá um exemplo de nós compostos com mesmos fatores, porém não isotópicos. Veja a figura a seguir:

Até agora falamos sobre nós compostos, e a seguinte pergunta nos é pertinente:

“Será que todo nó provém de uma soma conexa?”

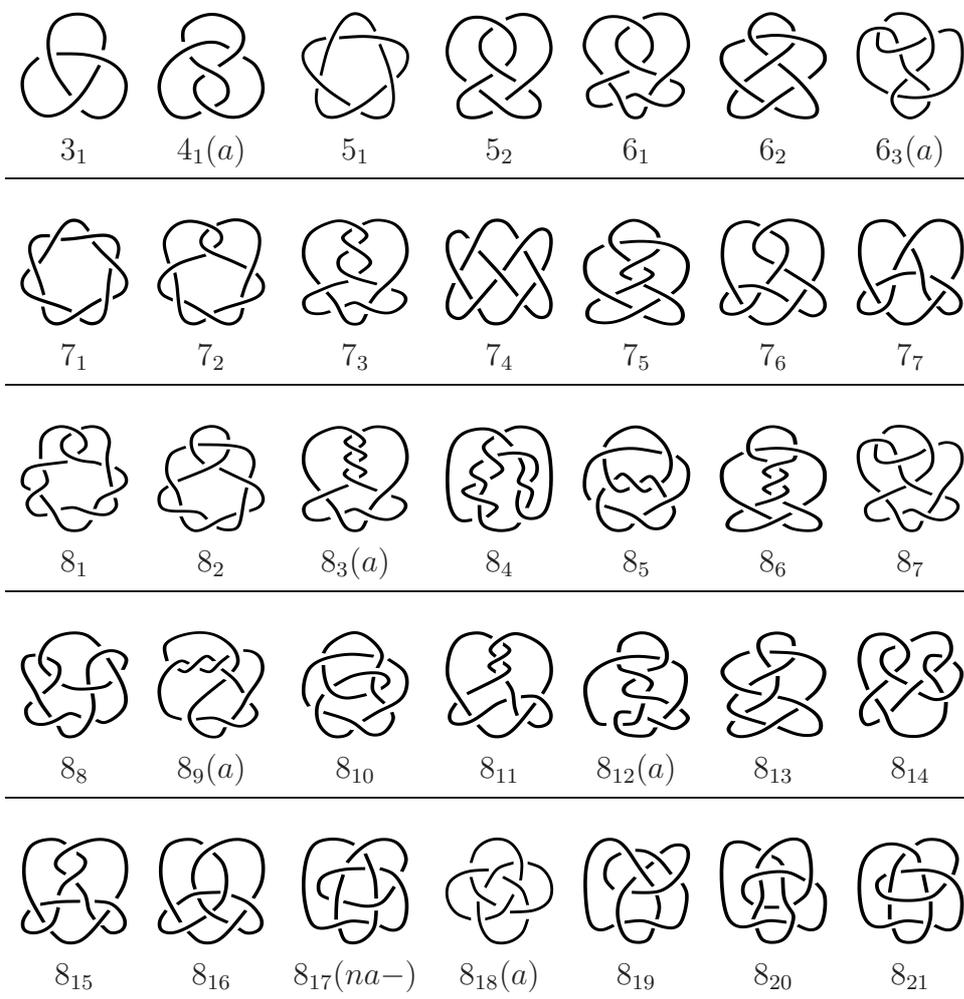
A resposta é negativa, e quando um determinado nó não provem de uma soma



Figura 1.14: Estes dois nós compostos, possuem mesmos nós fatores (nó da figura 1.13 mas são distintos.

conexa de dois nós não triviais, dizemos que este é um nó primo. Observe que um nó composto sempre pode ser decomposto em dois nós primos.

A seguir apresentamos uma tabela de nós primos com até 8 cruzamentos, onde o número em destaque nos dá a quantidade de cruzamentos e o índice sua classe de isotopia.



Nossa discussão agora será em torno dos nós **reflexivos**, para tal precisaremos definir o diagrama de um **nó espelhado**, o que por sua vez é fácil de ser obtido. Dado o diagrama D de um nó K obtemos seu diagrama espelhado, que

denotaremos por $D_{K^!}$ apenas trocando os cruzamentos de lugar, fazendo aqueles que passam por baixo passarem por cima e os que passam por cima passarem por baixo. Denotaremos por $K^!$ o nó associado ao diagrama $D_{K^!}$.

Definição 1.14. *Um nó K é dito **reflexivo** se este é isotópico a $K^!$, isto é se o diagrama D_K se transforma no diagrama $D_{K^!}$, por uma sucessão finita de movimentos de Reidemeister.*

O nó figura oito é um exemplo de nó reflexivo, ver figura 1.5, pois como vimos anteriormente, é possível por meio de uma sucessão finita de movimentos de Reidemeister transformá-lo em sua imagem espelhada. Observemos ainda que o diagrama D_K , induz uma orientação sobre $D_{K^!}$, além disso as características inversíveis e reflexivos são independentes, vimos por exemplo que o nó figura oito é reflexivo e invertível, já o nó trefoil é invertível mas não é reflexivo.

1.3 Invariantes Clássicos

Afim de classificarmos as classes de nós (via isotopia), vamos recorrer ao conceito de **invariante da classe de isotopia** de nós. Suponhamos que para um determinado nó K associamos um objeto matemático $\varphi(K)$ de tal forma que se dois nós K e K' são isotópicos então $\varphi(K) = \varphi(K')$. O objeto $\varphi(K)$ é dito um invariante de nó. Nesta seção iniciaremos nossos estudos sobre os invariantes clássicos da teoria de nós. Em geral os invariantes de nós são definidos sobre os diagramas, mas veremos uma importante classe de invariantes que serão definidos de maneira distinta, a saber os invariantes de Vassiliev. Apesar de nossa intuição nos dizer que o nó figura oito e o nó trefoil não são isotópicos, depois de estudarmos o mais simples dos invariantes, poderemos confirmar que não estávamos errados. Além disso, analisando alguns casos concluiremos que um invariante não pode depender da projeção utilizada, assim destacamos a importância dos movimentos de Reidemeister, que nos auxiliarão a provar se uma dada ferramenta é ou não um invariante.

A importância de estudarmos os invariantes clássicos da Teoria de Nós se deve ao fato de serem os primeiros a distinguir nós.

1.3.1 Tricolorabilidade

A **tricolorabilidade** é o mais simples dos invariantes e é fácil de ser definido, este invariante nos dá apenas dois resultados, verdadeiro ou falso, isto é, um nó

é ou não tricolorizável. Este método foi desenvolvido por Ralph Fox (1913-1973) e está baseado na coloração de um determinado diagrama de nó.

Definição 1.15. *O diagrama de um nó é dito **tricolorizável** se pudermos colorir seus arcos de tal forma que:*

- (i) *A cada arco seja atribuído uma cor.*
- (ii) *Sejam usadas pelo menos duas cores e no máximo três.*
- (iii) *Para cada cruzamento, todos os arcos tem a mesma cor ou num determinado cruzamento temos os arcos com três cores distintas.*

Um exemplo de nó tricolorizável é o nó trefoil, como mostra a figura 1.3.1.



Figura 1.15: Diagrama tricolor do nó trefoil.

Observe na figura anterior que utilizamos diagramas distintos do nó trefoil, isto foi feito para darmos a ideia de que independente do diagrama utilizado, o nó mantém-se tricolorizável, este fato se confirma no teorema a seguir:

Teorema 1.16. *A tricolorabilidade é um invariante da classe de isotopia de nós.*

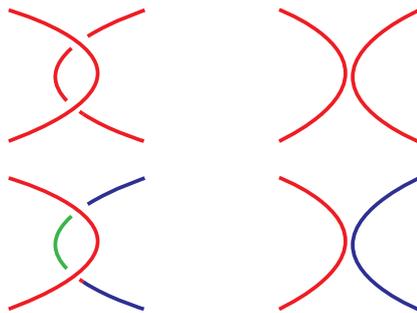
Demonstração. O movimento do tipo R_0 não altera cruzamentos, logo não possui influência na tricolorização de um diagrama. Vamos então analisar os movimentos do tipo R_1 , R_2 e R_3 , e mostrar que a coloração em qualquer cruzamento alterado por um destes três movimentos, pode ser modificado de forma a manter o diagrama resultante tricolor.

[R_1] Quando introduzimos ou removemos uma torção estamos trabalhando no mesmo arco, assim a cor permanece a mesma em todo movimento.

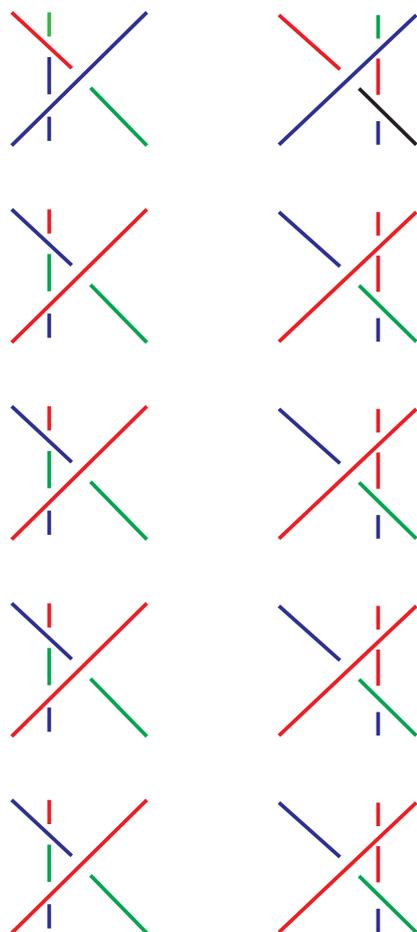


[R_2] Se temos arcos com a mesma cor e vamos introduzir ou remover um cruzamento, ao final do movimento continuaremos utilizando a mesma cor.

Se temos arcos com três cores distintas e vamos introduzir ou remover um cruzamento, ao final do movimento atribuiremos uma só cor a cada arco.



[R_3] Neste caso, temos cinco possíveis situações:



fazendo as mudanças de acordo com as figuras, concluímos a demonstração.

□

Definição 1.17. Um nó é dito *tricolorizável* se os seus diagramas são tricolorizáveis.

A importância do teorema 1.16 se dá ao fato de que se um respectivo nó é tricolorizável então independente do diagrama escolhido para representá-lo, este também é tricolorizável.

A noção de tricolorabilidade pode ser estendida para n -colorabilidade, naturalmente esta generalização necessita que as condições da definição de tricolorabilidade sejam traduzidas por representações numéricas, por não ser de fundamental importância nesta dissertação, não faremos esta generalização, porém pode ser encontrada em [8].

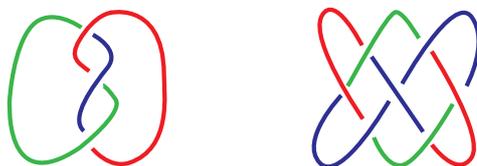


Figura 1.16: Diagramas tricolorizáveis.



Figura 1.17: Diagramas não tricolorizáveis.

Como visto na figura 1.17 o nó figura-oito é não tricolorizável, porém ao estendermos este conceito, veremos que este nó é um exemplo de nó penta color. Com esta última informação, vemos que trata-se de um invariante “fraco”, pois divide o espaço de todos os nós em apenas dois espaços, isto é o espaço dos nós tricolorizáveis e o espaço dos nós não tricolorizáveis. Observe por exemplo que o nó trivial esta na mesma classe de isotopia do nó figura oito, desta forma se faz necessário o estudo de outros invariante, onde estes dividem melhor o espaço de todos os nós em \mathbb{R}^3 .

1.3.2 Polinômio de Alexander

Muitos invariantes de nós foram desenvolvidos durante o século XX, J. Alexander em 1928 associou a cada nó um polinômio de tal maneira que se um nó pudesse se transformar no outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister seus polinômios associados são iguais, este invariante ficou conhecido como **polinômio de Alexander** e durante quase 60 anos este foi o único invariante polinomial para nós orientados.

Para determinarmos o polinômio de Alexander de um nó K , identificamos cada cruzamento e cada arco de um certo diagrama D do nó, fazemos esta identificação utilizando números naturais para os cruzamentos e letras minúsculas para cada arco. Lembrando que o número de cruzamentos é exatamente o número de arcos,

podemos assim associar uma matriz A_K ($n \times n$), onde n é o número de cruzamentos (consequentemente o número de arcos), do diagrama D .

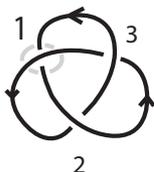
Esta matriz será construída de acordo com as seguintes regras:

1° Passo: Estabelecemos a orientação para o diagrama.

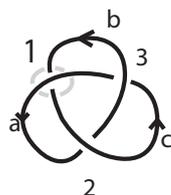
2° Passo: Estabelecemos o número 1 para um dos cruzamentos do diagrama.



3° Passo: Fazemos a numeração dos outros cruzamentos em 2, 3, ... de acordo com a ocorrência após o cruzamento 1.

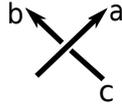


4° Passo: Nomeamos os arcos em a, b, c, \dots , utilizando o mesmo procedimento de numeração dos cruzamentos, onde o arco a é aquele que está por cima no primeiro cruzamento.



$$\begin{array}{rcc}
 & \text{arco a} & \text{arco b} & \dots & \text{arco n} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{cruzamento 1} & \rightarrow & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \text{cruzamento 2} & \rightarrow & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \text{cruzamento n} & \rightarrow & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{array} = A_K$$

Veremos a seguir como determinamos a matriz A_K . Em um n -ésimo cruzamento qualquer temos três arcos a, b e c que na matriz A_K terão associados os valores $1 - t, -1$ e t não necessariamente nesta ordem. A atribuição dos valores será feita de acordo com o sinal do cruzamento.



- Para cruzamentos positivos associamos $1 - t$ ao arco a , -1 ao arco c e t ao arco b .



- Para cruzamentos negativos associamos $1 - t$ ao arco a , t ao arco c e -1 ao arco b .
- Aos arcos que não influenciam no cruzamento atribuímos o valor 0 .

Observe que de acordo com o procedimento acima, na determinação dos valores de uma linha k da matriz A_K , nas posições correspondentes a arcos que não aparecem no k -ésimo cruzamento os valores atribuídos são todos iguais a 0 .

O polinômio de Alexander é obtido calculando o determinante de uma submatriz da matriz A_K .

Definição 1.18. *Seja K um nó com diagrama D . A matriz de Alexander denotada por A_D é a matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ obtida ao excluirmos a n -ésima linha e a n -ésima coluna da matriz A_K . O determinante da matriz de Alexander é chamado **polinômio de Alexander** de D e é denotado por $\Delta_{D_K}(t)$.*

Vale observar que o polinômio obtido depende da escolha feita para nomear os arcos e os cruzamentos de um diagrama, além disso por convenção o polinômio de Alexander do nó trivial é o polinômio constante igual a 1 . O algoritmo utilizado para determinar o polinômio de Alexander, se aplicado apropriadamente aos diagramas de K_+ , K_- e K_0 nos dão polinômios que satisfazem a seguinte relação:

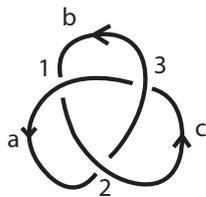
$$\Delta_{K_+(t)} - \Delta_{K_-(t)} = (1 - t)\Delta_{K_0}(t). \quad (1.1)$$

Esta relação foi provada por Alexander e recebe o nome de relação skein de Alexander.

Afim de destacar os pontos positivos e negativos deste invariante clássico da Teoria de Nós, veremos a seguir exemplos do polinômio de Alexander do nó Trefoil e de sua imagem espelhada.

Exemplo:

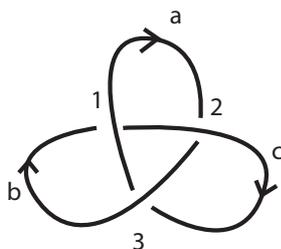
Polinômio de Alexander do nó Trefoil



$$\begin{array}{r}
 \text{arco a} \quad \text{arco b} \quad \text{arco c} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{cruzamento 1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t \\ -1 & t & 1-t \\ t & 1-t & -1 \end{bmatrix} = A_D(T) \\
 \text{cruzamento 2} \rightarrow \\
 \text{cruzamento 3} \rightarrow
 \end{array}$$

$$\nabla_D(T) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = -t^2 + t - 1$$

Exemplo: Polinômio de Alexander do nó Trefoil Espelhado



$$\begin{bmatrix} 1-t & t & -1 \\ t & -1 & 1-t \\ -1 & 1-t & t \end{bmatrix}$$

$$= A_D(T^!)$$

$$\nabla_D(T^!) = \begin{vmatrix} 1-t & t \\ t & -1 \end{vmatrix} = -t^2 + t - 1$$

Utilizando os exemplo acima podemos notar que o polinômio de Alexander não difere um nó de sua imagem no espelho, sendo assim esse invariante não é capaz de produzir uma boa classificação dos nós, e isto motivou de alguma forma surgimento de outros invariantes.

1.3.3 Polinômio de Conway

Estudaremos nesta seção mais um dos invariantes clássicos da Teoria de Nós, o **polinômio de Conway**, este por sua vez está intimamente ligado ao polinômio

de Alexander e foi desenvolvido por volta dos anos 60. Este polinômio é calculado utilizando um método recursivo, chamado de **operação *skein***. Observamos que esta relação não é a mesma da equação 1.1.

O polinômio de Conway em si não é considerado um novo invariante polinomial, porém esse procedimento de introduzir uma relação *skein* será utilizado na construção de vários outros invariantes de nós, daí a importância do desenvolvimento de Conway.

Dado um nó orientado K , selecionamos um cruzamento. Preservando a orientação inicial e considerando que o ponto de cruzamento escolhido é positivo (negativo), identificaremos o nó por L_+ (L_-), trocando esses cruzamentos obtemos L_- (L_+) e se suprimirmos este cruzamento (de modo a desfaze-lo) obtemos L_0 .

As operações descritas acima são chamadas **operações *skein*** e nos permitem, através de um diagrama de nó, obter um novo diagrama com mudança em apenas um cruzamento. Desta forma para cada diagrama e cruzamento de nó, existem seus diagramas associados, diagramas *skein*, que denotaremos por D_+ , D_- e D_0 , estes diagramas, por sua vez, correspondem diretamente aos nós denominados por L_+ , L_- e L_0 . É fácil notar que os diagramas associados a L dependem da escolha do cruzamento.

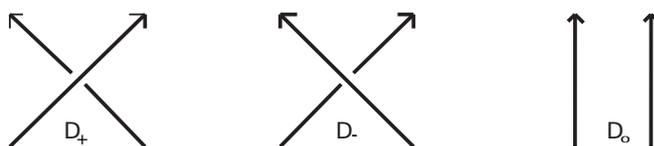


Figura 1.18: Diagramas Skein.

Um diagrama ***skein em árvore*** nada mais é do que uma maneira de representarmos o processo de alterar os cruzamentos de um diagrama mostrando abaixo de um diagrama inicial o diagrama obtido através de uma mudança de arco. Veremos a seguir exemplos de digramas *skein* em árvore, este processo facilita a definição recursiva do polinômio de Conway.

Observe na figura 1.20 que utilizamos o diagrama *skein* dos anéis de Hopf (figura 1.19) para concluirmos o diagrama *skein* do nó trefoil. Notemos também que num determinado nível do esquema em árvore, obtemos o nó trivial, e é exatamente aí que terminamos o processo, isto é, o diagrama em árvore está completo quando em todos níveis obtemos o nó trivial.

Observando o método desenvolvido por Alexander, Conway definiu uma nova relação *skein*, estabelecendo assim uma nova relação entre os polinômios obtidos

Definição 1.19. Um polinômio que identifica um determinado nó K é um **polinômio de Conway** se satisfaz as condições a seguir:

- (i) $\nabla_K(z)$ é um invariante da classe de isotopia de K ;
- (ii) O polinômio associado ao nó trivial é 1, isto é $\nabla_K(z) = 1$;
- (iii) Os nós K_+ , K_- e K_0 se relacionam segundo a relação *skein* abaixo:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$$

Observe nos exemplos a seguir, como o polinômio de Conway é definido de maneira recursiva.

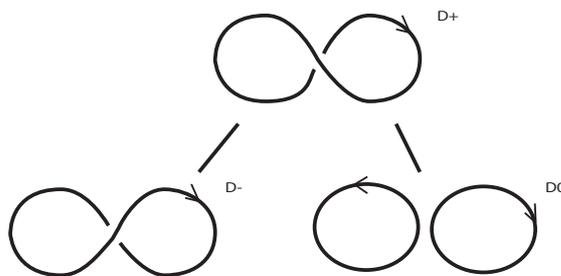


Figura 1.21: Diagrama *skein* do nó trivial com duas componentes.

Utilizando o diagrama da figura 1.21 observe que K_+ e K_- são nós triviais, desta forma ∇_{K_+} e ∇_{K_-} são iguais a 1, pela definição do polinômio de Conway, utilizando a relação *skein* da definição temos $\nabla_{K_0} = \nabla_{o^2} = 0$. Sabendo que $\nabla_{o^2} = 0$ e observando o diagrama *skein* dos anéis de Hopf, figura 1.19, podemos calcular o polinômio de Conway dos anéis de Hopf:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z) \iff \nabla_{K_+}(z) = \nabla_{K_-}(z) + z \iff \nabla_H(z) = z$$

Pelo raciocínio acima, e pelo digrama da figura 1.20 concluímos facilmente que o polinômio de Conway associado ao nó trefoil é dado por $\nabla_T(z) = z^2 + 1$.

Apesar de dividir o espaço de todos os nós de maneira mais conveniente do que a tricolorabilidade, o polinômio de Conway ainda não nos permite distinguir nós não reflexivos de sua imagem espelhada, alguns nós não invertíveis e nem mesmo o nó trivial, isto é, existem nós tais que $\nabla_K = 1$, contudo estes nós podem não ser o nó trivial.

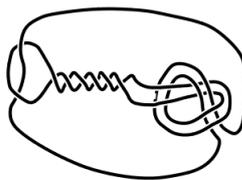


Figura 1.22: Diagrama de um nó não trivial com polinômio de Conway constante igual a 1.

1.3.4 Polinômio de Jones

Mais de cinquenta anos após o surgimento do polinômio de Alexander, Vaughan Jones em 1984 introduz um novo invariante da classe de isotopia para nós, o **polinômio de Jones**. Este invariante resolve alguns dos problemas ligados ao polinômio de Conway e também é definido recursivamente.

Definição 1.20. *Seja K um nó, o **polinômio de Jones** de K , denotado por $V(K; t)$ é o polinômio que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $V(K; t)$ é um invariante da classe de isotopia;
- (ii) O polinômio associado ao nó trivial é 1, isto é, $V(O; t) = 1$;
- (iii) Os nós K_+ , K_- e K_0 se relacionam através da seguinte relação skein:

$$t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(K_0; t)$$

O algoritmo para determinarmos o polinômio de Jones é análogo ao do polinômio de Conway, com base no diagrama em árvore de um nó K e a relação skein dada na definição anterior, faremos a seguir alguns exemplos de como calcular o polinômio de Jones para determinados nós:

Exemplo: Nó trivial com duas componentes:

Observando o diagrama skein da figura 1.21 e lembrando que $V(O; t) = 1$ o polinômio associado ao nó trivial com duas componentes é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t^{-1}V(O; t) - tV(O; t) &= (t^{-1/2} - t^{1/2})V(K_0; t) \\ \Leftrightarrow t^{-1} - t &= (t^{-1/2} - t^{1/2})V(K_0; t) \\ \Leftrightarrow V(O; t) = V(K_0; t) &= \frac{t^{-1} - t}{t^{-1/2} - t^{1/2}}. \end{aligned}$$

Exemplo: Nó Trefoil:

$$\begin{aligned}
t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2})V(K_0; t) \\
\Leftrightarrow t^{-1}V(T; t) - tV(O; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2})V(H_1; t) \\
\Leftrightarrow t^{-1}V(T; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2}).(-t^{5/2} - t^{1/2}) + t \\
\Leftrightarrow V(T; t) &= -t^4 + t^3 + t.
\end{aligned}$$

Exemplo: Imagem espelhada do nó trefoil:

$$\begin{aligned}
t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2})V(K_0; t) \\
\Leftrightarrow t^{-1}V(O; t) - tV(T^!; t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V(H_2; t) \\
\Leftrightarrow -tV(T^!; t) &= t^{-1} + (t^{1/2} - t^{-1/2}).(t^{-1/2} - t^{-5/2}) \\
\Leftrightarrow V(T^!; t) &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.
\end{aligned}$$

Exemplo: Nó figura oito:

Para calcular o polinômio de Jones do nó figura oito, precisamos saber o polinômio associado aos anéis de Hopf H_2 , para obtermos este polinômios basta invertermos a orientação de uma das componentes dos anéis de Hopf H_1 , veja figura 1.19. Sabendo que $V(H_2; t) = -t^{1/2} - t^{-5/2}$, calculemos o polinômio de Jones para o nó figura oito, que denotaremos por F :

$$\begin{aligned}
t^{-1}V(K_+; t) - tV(K_-; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2})V(K_0; t) \\
\Leftrightarrow t^{-1}V(F; t) - tV(O; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2})V(H_2; t) \\
\Leftrightarrow t^{-1}V(F; t) &= (t^{-1/2} - t^{-1/2}).(-t^{-5/2} - t^{1/2}) + t \\
\Leftrightarrow V(F; t) &= -t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2.
\end{aligned}$$

Um detalhe importante, vem do fato de que agora temos alguns nós associados a polinômios bastantes distintos, em comparação com o polinômio de Conway, por exemplo: $\nabla_{O^2}(z) = 0$ enquanto $V(O^2; t) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$. Uma outra importante

característica do polinômio de Jones é dada no teorema a seguir, que nos mostra como este invariante se comporta em relação a soma conexa de dois nós.

Teorema 1.21. [8] *Se $J\#K$ é a soma conexa de nós J e K , então o polinômio de Jones de $J\#K$ é dado por:*

$$V(J\#K; t) = V(J; t)V(K; t).$$

Vimos anteriormente que o polinômio de Conway não distingue um nó de sua imagem no espelho, mas vimos acima que o polinômio de Jones associado ao nó trefoil é distinto daquele associado a sua imagem espelhada. O resultado a seguir nos mostra que podemos estender este resultado.

Teorema 1.22. [8] *Seja K um nó, se $K!$ é a imagem espelhada de K , então*

$$V(K!; t) = V(K; t^{-1}).$$

Apesar de distinguir nós de maneira mais eficiente que o polinômio de Conway, o polinômio de Jones ainda não distingue nós não invertíveis, como mostra o seguinte resultado:

Teorema 1.23. [8] *Seja K um nó, se $-K$ é o nó obtido ao se inverter a orientação de K , então*

$$V(-K; t) = V(K; t).$$

Apesar das vantagens apresentadas pelo polinômio de Jones, existem nós que não são isotópicos mas ainda assim possuem mesmo polinômio de Jones, portanto este invariante não classifica todos os nós.



Figura 1.23: Nós não distinguíveis pelo polinômio de Jones.

Outra questão é levantada ao pensarmos no nó trivial, no caso do polinômio de Conway e de Alexander temos nós não triviais associados ao polinômio 1, algo ainda desconhecido para o polinômio de Jones, isto é temos em aberto a seguinte questão:

“Existe um nó não trivial cujo polinômio de Jones associado é 1?”

Todos os invariantes estudados até aqui tem sua importância, mas nenhum deles classificam todos os nós, mas é notável o desenvolvimento do estudo de invariantes de nós que ocorreu com o passar do tempo.

1.4 Invariantes de Vassiliev

Nesta seção estudaremos uma classe importante de invariantes que podem ser utilizados também na Teoria de Nós, os **invariantes de Vassiliev** ou **invariantes do tipo finito**. Diferente dos invariantes estudados até aqui, este invariante não é definido sobre o diagrama de um determinado nó e sim sobre o conjunto F , de todas as aplicações $f : S^1 \rightarrow R^3$.

O subconjunto de F formado por todas as aplicações $f : S^1 \rightarrow R^3$ que são mergulhos é o conjunto de todos os nós, e o denotaremos por Ω .

A **variedade discriminante de F denotada por Σ** é o subconjunto de F formado por todas as aplicações que falham ao ser mergulhos, isto é, $\Sigma = F - \Omega$, e por outro lado podemos ver o conjunto de todos os nós como complementar de Σ , isto é, $\Omega = F - \Sigma$.

A idéia de Vassiliev consistiu em estudar justamente o complemento da variedade discriminante descrita acima, no espaço das aplicações. Este discriminante consiste das aplicações que possuem algum tipo de singularidade, como por exemplo auto-interseções e pontos duplos.

As componentes conexas do espaço dos nós são exatamente as classes de isotopias dos nós e os invariantes são localmente funções constantes neste mesmo espaço.

1.4.1 Nós singulares e relação skein de Vassiliev

Definição 1.24. *Um **nó singular** é uma aplicação diferenciável de $S^1 \rightarrow R^3$ que falha ao ser um mergulho, isto é, que não é injetiva.*

Neste trabalho vamos considerar nós singulares com apenas um tipo de singularidade, os **pontos duplos**, que por sua vez é considerado uma singularidade do tipo simples.

Definição 1.25. *Consideremos a aplicação $f : A \rightarrow B$. Dizemos que um ponto $p \in im(f)$ é um **ponto duplo** de f se $f^{-1}(p)$ consiste em dois pontos.*

A definição dada acima é a definição geral de um ponto duplo, porém para o nosso caso exigiremos um pouco mais, e usaremos a definição a seguir:

Definição 1.26. *Considere a aplicação $f : S^1 \rightarrow R^3$, o ponto $p \in Im(f) \subset R^3$ é um **ponto duplo transversal** de f se $f^{-1}(p)$ consiste de dois pontos, t_1 e t_2 e os vetores tangentes $f'(t_1)$ e $f'(t_2)$ são linearmente independentes.*

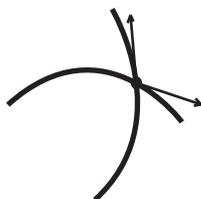


Figura 1.24: Exemplo de ponto duplo.

Observe que a figura acima nos dá o exemplo de ponto duplo segundo as duas definições acima, porém a definição que adotaremos impede de que tenhamos os vetores tangentes colineares. Neste capítulo usaremos uma notação diferente da usada no capítulo anterior, esta necessidade se apresenta pelo fato de trabalharmos neste momento com os nós singulares.

Notação:

$K_+ =$ , $K_- =$ , $K_0 =$  e os cruzamentos que possuem pontos duplos serão denotados por: .

A seguir apresentamos o polinômio de Conway e de Jones utilizando a notação acima.

Definição 1.27. O **polinômio de Conway** C é um invariante de nós orientados que toma valores no anel $\mathbb{Z}[t]$ e é definido pelas propriedades a seguir:

$$C\left(\textcircled{\curvearrowright}\right) = 1,$$

$$C\left(\textcircled{\nearrow}\right) - C\left(\textcircled{\searrow}\right) = tC\left(\textcircled{\uparrow}\right).$$

Definição 1.28. O **polinômio de Jones** é unicamente determinado pela relação *skein*:

$$t^{-1}J\left(\textcircled{\nearrow}\right) - tJ\left(\textcircled{\searrow}\right) = (t^{1/2} - t^{-1/2})J\left(\textcircled{\uparrow}\right) \quad (1)$$

e a condição inicial

$$J\left(\textcircled{\curvearrowright}\right) = 1. \quad (2)$$

A partir de agora utilizaremos apenas a notação definida anteriormente.

Agora vamos introduzir a **relação *skein* de Vassiliev**, que nos permitirá adicionar ou remover pontos duplos de um nó singular K .

$$v\left(\textcircled{\times}\right) = v\left(\textcircled{\nearrow}\right) - v\left(\textcircled{\searrow}\right). \quad (1.2)$$

Em nosso caso, v é um invariante de nó com valores em algum grupo abeliano. O lado esquerdo da equação é valor do invariante v sobre o nó singular K , no lado direito temos a diferença do valor de v sobre um nó (possivelmente singular) obtido de K ao substituir o ponto duplo por um cruzamento positivo e negativo respectivamente.

Quando aplicamos a relação *skein* de Vassiliev, podemos dizer que estamos desfazendo um ponto duplo, e este processo não depende do diagrama escolhido para representar o nó singular.

Definição 1.29. *Um invariante de nó é dito um **invariante de Vassiliev** ou **invariante do tipo finito** de ordem (ou grau) $\leq n$ se sua extensão, via relação *skein* de Vassiliev, se anula em todos os nós singulares com mais de n pontos duplos. Um invariante de Vassiliev é dito de ordem (ou grau) n se é de ordem $\leq n$, mas não $\leq n + 1$.*

Definição 1.30. *Um **A-módulo à direita** é o par (M, \cdot) , onde M é um K -espaço vetorial e $\cdot : M \times A \rightarrow M$, $(m, a) \mapsto ma$, é uma operação binária satisfazendo as seguintes condições:*

$$\begin{array}{ll} (a) (x + y)a = xa + ya; & (d) x1 = x; \\ (b) x(a + b) = xa + xb; & (e) (x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda. \\ [5] (c) x(ab) = (xa)b; & \end{array}$$

De forma similar definimos A-módulos à esquerda.

Denotaremos por V_n o conjunto dos invariantes de Vassiliev de ordem $\leq n$ com valores em um anel R . Segue da definição que para cada n o conjunto V_n é um R -módulo, desta forma faz sentido em falarmos da dimensão destes conjuntos, o que faremos mais adiante, além disso prova-se que

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_n \subseteq \dots \subseteq V = \bigcup V_n.$$

Quando dizemos **extensão**, estamos pensando em aplicar a relação *skein* de Vassiliev juntamente com a relação *skein* de outros invariantes, isto ficará claro com o entendimento do exemplo abaixo.

Vale observar que em geral, um invariante de Vassiliev toma valores em grupos abelianos arbitrários. Entretanto todos os invariantes que trataremos neste estudo tomam seus valores em anéis comutativos.

Exemplo: O n -ésimo coeficiente do polinômio de Conway é um invariante de

Vassiliev de ordem $\leq n$. De fato, já vimos que a relação skein do polinômio de Conway é dada por

$$C\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) = tC\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array}\right) \quad ,$$

sendo assim quando fazemos a extensão através da relação skein de Vassiliev temos:

$$C\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) = tC\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Aplicando esta relação k vezes para um nó singular com k pontos duplos temos:

$$C\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) \dots \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) = t^k C\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array}\right) \dots \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Se $k \geq n + 1$, então o coeficiente de t^n neste polinômio é nulo.

Uma outra maneira de considerar os invariantes de Vassiliev é a seguinte:

Seja v um invariante de nós singulares com n pontos duplos e $\nabla(v)$ a extensão de v , para nós singulares com $n + 1$ pontos duplos, através da relação *skein* de Vassiliev.

Podemos considerar ∇ um operador que faz a correspondência entre os respectivos espaços dos invariantes. A função $V : K \rightarrow \mathcal{R}$ é um invariante de Vassiliev de grau n , se satisfaz a seguinte equação diferencial $\nabla^{n+1}(v) = 0$.

Esta forma de considerarmos os invariantes de Vassiliev, pode ser encarada como uma analogia entre os invariantes de Vassiliev como um sub-espço do espaço de todos os invariantes e os polinômios como um sub-espço de todas aplicações suaves na reta real.

Vimos anteriormente que o n -ésimo coeficiente do polinômio de Conway é um invariante de Vassiliev, e podemos afirmar que o polinômio de Conway em si não é um invariante do tipo finito, mas sim uma combinação linear infinita destes invariantes, isto é, uma série de potência dos invariantes de Vassiliev. Esta propriedade se estende a todos os invariantes polinomiais clássicos, mas sempre se faz necessário uma mudança de variável. Modificando o polinômio de Jones de um nó K , substituindo $t = e^h$, utilizando a relação *skein* de Vassiliev para fazer a expansão do polinômio de Jones e denotando por $j_n(K)$ o coeficiente de h^n nesta expansão temos o seguinte:

Teorema 1.31. *O coeficiente $j_n(K)$ é um invariante de Vassiliev de ordem $\leq n$.*

Demonstração. Fazendo a substituição $t = e^h = 1 + h + \dots$ na relação skein do

polinômio de Jones temos:

$$(1 - h + \dots) \cdot J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) - (1 + h + \dots) \cdot J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) = (h + \dots) \cdot J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Observe agora que a diferença,

$$J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) - J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) = J\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array}\right)$$

é congruente a 0 módulo h . Desta forma o polinômio de Jones de um nó singular com k pontos duplos é divisível por h^k . Em particular o coeficiente de h^n é igual a zero. \square

1.4.2 Invariantes de Vassiliev de graus 0, 1 e 2

Dizemos que efetuamos um **salto** de um nó para o outro, quando tomamos um determinado diagrama, e efetuamos uma mudança de cruzamento, fazendo quem passa por baixo (cima) passar por cima (baixo), observando que quando fazemos isso devemos sempre passar por um ponto duplo. A figura 1.25 nos dá um exemplo de salto.



Figura 1.25: Exemplo de Salto.

Vimos que para cada n o conjunto dos invariantes de Vassiliev V_n é um \mathcal{R} -módulo, desta forma vamos determinar a dimensão dos espaços V_0 , V_1 e V_2 .

Proposição 1.32. $V_0 = \text{constante}$ e $\dim V_0 = 1$.

Demonstração. Seja $f \in V_0$, por definição, o valor da extensão de f com mais de 0 pontos duplos é 0.

Seja K um nó arbitrário, observe que qualquer diagrama de K pode se transformar no diagrama do nó trivial K_0 por meio de mudanças de cruzamentos, e sempre que efetuamos esta mudança passamos por um ponto duplo, mas por hipótese o valor do invariante calculado no nó singular obtido é nulo, assim $f(K) = f(K_0)$.

Portanto f é constante. \square

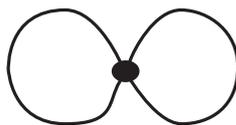


Figura 1.26: Nó singular figura infinito.

Proposição 1.33. *Os espaços V_1 e V_0 são iguais.*

Demonstração. Um nó singular com um ponto duplo é dividido em duas curvas fechadas por este ponto. Usando o mesmo raciocínio da prova anterior mostramos que o valor de um invariante v sobre qualquer nó singular com um ponto duplo é igual ao valor de v sobre o nó singular figura infinito, isto é,

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 0 \quad (1.3)$$

Portanto $V_0 = V_1$. □

Proposição 1.34. $\dim V_2 = 2$.

Demonstração. Primeiramente entenderemos por que o argumento utilizado na prova das duas proposições anteriores não funcionam neste caso. Tome um nó com dois pontos duplos e tente transforma-lo em algum nó fixo com dois pontos duplos, usando apenas transformações suaves e mudanças de cruzamentos. Observe que quaisquer nó com dois pontos duplos podem ser reduzidos nos dois nós a seguir:



Para facilitar a escrita da demonstração denotaremos os nós acima de K_1 e K_2 respectivamente.

Estes dois nós não podem ser obtidos um através do outro, e a principal diferença entre eles é a maneira que se distribuem os pontos duplos sobre as curvas.

Denotaremos por 1 e 2 os pontos duplos de K_1 e K_2 , quando percorrermos o traço de K_1 os pontos duplos são encontrados da seguinte forma 1122 (ou 1221, 2211, 2112 se iniciarmos de u pontos diferentes).

Para o nó K_2 a sequência obtida é 1212 (ou 2121). As sequências 1122 e 1212 são distintas, mesmo quando permitimos permutações cíclicas.

Tomemos agora um nó singular K com dois pontos duplos, se a sequência obtida ao percorrermos o diagrama de K é 1122, então podemos transformá-lo no nó K_1 passando por um processo de deformação através de um nó singular com três pontos duplos, se a sequência obtida é 1212, podemos transformar K em K_2 passando por este mesmo processo.

O argumento utilizado acima mostra que, para quaisquer \mathcal{R} -valores dos invariantes de Vassiliev de ordem 2 existe uma função correspondente no conjunto de dois elementos K_1, K_2 com valores em \mathcal{R} .

Desta forma obtemos uma aplicação $V_2 \rightarrow R^2$. Afirmamos que o kernel desta aplicação é V_1 .

De fato, dado um invariante $f \in V_2$ que satisfaz $f(K_1) = f(K_2) = 0$, por definição f se anula em todos os nós com dois pontos duplos, logo $f \in V_1$.

Por outro lado, a imagem desta aplicação linear possui dimensão ≤ 1 , já que para qualquer invariante de nós f temos $f(K_1) = 0$.

Utilizando agora o teorema do núcleo e da imagem temos que $\dim V_2 \leq 2$.

Observando que o segundo coeficiente do polinômios de Conway é não constante, podemos concluir que $\dim V_2 = 2$ \square

Estudaremos a seguir os **diagramas de corda**, e veremos um importante resultado que associa os invariantes de Vassiliev a estes diagramas.

Definição 1.35. Um **diagrama de corda** de ordem n (ou grau n) é um círculo orientado com um conjunto distinto de n pares disjuntos de pontos distintos, considerando a menos de orientação o difeomorfismo do círculo.

Exemplos:

$$\begin{aligned}
 [5]A_1 &= \left\{ \bigcirc \right\}, \\
 A_2 &= \left\{ \bigcirc \text{ (vertical chord)}, \bigcirc \text{ (diagonal chord)} \right\}, \\
 A_3 &= \left\{ \bigcirc \text{ (horizontal chord)}, \bigcirc \text{ (vertical chord)}, \bigcirc \text{ (diagonal chord)}, \bigcirc \text{ (two horizontal chords)}, \bigcirc \text{ (two diagonal chords)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Os diagramas de corda são usados para codificar algumas informações sobre nós singulares.

Definição 1.36. O diagrama de corda $\sigma(K) \in A_n$ de um nó singular K com n pontos duplos, é obtido ao marcarmos sobre o círculo parametrizado n pares de pontos cujas imagens são os n pontos duplos do nó singular K .

Exemplos:

$$\sigma\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \sigma\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

A proposição a seguir torna clara a importância dos diagramas de corda e mostra sua relação com os invariantes de Vassiliev.

Proposição 1.37. O valor de um invariante de Vassiliev de ordem $\leq n$ sobre um nó singular k com n pontos duplos, depende apenas do diagrama de corda de K :

$$\sigma(K_1) = \sigma(K_2) \Rightarrow v(K_1) = v(K_2).$$

Demonstração. Suponhamos que $\sigma(K_1) = \sigma(K_2)$, então existe uma correspondência biunívoca entre as cordas de ambos os diagramas de corda, e consequentemente entre os pontos duplos de K_1 e K_2 .

Colocando K_1 e K_2 em R^3 , fazendo corresponder os pontos duplos e os ramos de cada um deles em uma vizinhança destes pontos.



Agora podemos deformar K_1 em K_2 sem alterar uma pequena vizinhança dos pontos duplos.

Podemos assumir que neste processo de deformação as únicas singularidades criadas são pontos duplos, todos sobre valores distintos dos parâmetros de deformação.

Pela relação *skein* de Vassiliev, em cada um desses eventos o valor de v não se altera e isto implica que $K_1 = K_2$. \square

Capítulo 2

Nós Legendreanos e seus Invariantes Clássicos

Nós legendreanos se encontram na interseção da Teoria de Nós com a Topologia de Contato, isto é, para estudar nós legendreanos é necessário inserir algumas estruturas na Teoria de Nós, estas estruturas por sua vez são objetos de estudos na Topologia de Contato. Um problema fundamental na Teoria dos Nós Legendreanos é determinar quando dois nós são ou não distintos, em outras palavras o problema se resume a encontrar invariantes de classe de isotopia legendreana.

Os primeiros invariantes de Nós Legendreanos foram o Número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov, conhecidos atualmente como invariantes clássicos. Eliashberg e Fraser provaram que os invariantes clássicos classificam o nó trivial e Etnyre e Honda provaram que estes invariantes também classificam o nó legendreano figura-oito.

Ainda existe espaço para pesquisa relacionada aos invariantes clássicos, entretanto Chekanov construiu um invariante de classe de isotopia legendreana mostrando que estes invariantes não são completos, isto é, existem nós com o mesmo número de Thurston-Bennequin e mesmo número de Maslov que não são legendreanamente isotópicos.

Neste capítulo estudamos os **nós legendreanos** e seus invariantes clássicos, o **número de Thurston-Bennequin** e o **número de Maslov**.

Iniciamos este estudo introduzindo a noção de **formas diferenciáveis** e estruturas de contato, usamos alguns resultados que não serão provados por fugirem do contexto principal, como por exemplo os resultados que dizem respeito as formas diferenciáveis.

É notável a semelhança nas primeiras definições dadas neste capítulo com as dadas no capítulo 1, onde estudamos nós topológicos. Conceitos como os movimentos de Reidemeister, e isotopias também ganham espaço no estudo de nós legendreanos e são de extrema importância.

Com o passar do tempo, o estudo de nós legendreanos tem se mostrado indispensável nos estudos referentes à Geometria de Contato e em outras área da Matemática.

As referências para o estudo deste capítulo são [5], [6], [9], [10], [12], [13], [14] e [15] e as figuras foram retiradas de [9] e [18].

2.1 Estruturas de Contato

Definição 2.1. *Uma k -forma diferenciável em \mathbb{R}^n é uma aplicação*

$$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$$

que pode ser escrita na forma :

$$\lambda(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, i_j \in 1, 2, \dots, n,$$

onde $a_{i_1, \dots, i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações diferenciáveis, onde $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ é o conjunto das aplicações k -lineares alternadas,

$$\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \times \dots \times T_p\mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para as **1-formas diferenciáveis** ou apenas **1-formas** consideremos para cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^3$ o espaço dual

$$(T_p\mathbb{R}^3)^* = \{f : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é um funcional linear}\}.$$

De acordo com a definição acima uma **1-forma** em \mathbb{R}^3 é uma aplicação

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow (T_p\mathbb{R}^3)^*$$

que pode ser escrita na forma

$$\lambda(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p,$$

onde $a_1, a_2, a_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

As 1-formas são as formas diferenciáveis de nosso maior interesse, vejamos a seguir como operar com formas diferenciáveis.

Sejam φ_1 e φ_2 1-formas diferenciáveis.

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix} \in \wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*.$$

Definição 2.2. Sejam $\alpha = \sum_I a_I dx_I, I = (i_1, \dots, i_k), i_1 < \dots < i_k$, e $\beta = \sum_J b_J dx_J, J = (j_1, \dots, j_s), j_1 < \dots < j_s$.

O **produto exterior** de α por β é dado por:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

É importante ressaltar que:

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

e

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0.$$

Exemplo: Sejam $\alpha = dz - ydx$ e $\beta = dz + xdy - ydx$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (dz - ydx) \wedge (dz + xdy - ydx) \\ &= (dz \wedge dz) + (dz \wedge xdy) - (dz \wedge ydx) - (ydx \wedge dz) - (ydx \wedge xdy) \\ &\quad + (y^2 dx \wedge dx) \\ &= (xdz \wedge dy) + (ydx \wedge dz) - (ydx \wedge dz) + (yxdy \wedge dx) \\ &= xdz \wedge dy + yxdy \wedge dx. \end{aligned}$$

Outra importante noção sobre as formas diferenciáveis, é a de diferencial exterior:

Definição 2.3. Seja $\lambda = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma diferenciável, a **diferencial exterior** de λ é a $(k+1)$ -forma diferenciável dada por:

$$d\lambda = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{J,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_I.$$

Exemplo: Sejam $\lambda = 3xydx - xzdy$ uma 1-forma em \mathbb{R}^3 . A diferencial de λ é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(3xy) \wedge dx - d(xz) \wedge dy \\ &= 3(ydx + xdy) \wedge dx - (zdx + xdz) \wedge dy \\ &= -3x dx \wedge dy - z dx \wedge dy + x dy \wedge dz \\ &= -(3x + z) dx \wedge dy + x dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Definição 2.4. Um **elemento de contato** em \mathbb{R}^n é um hiperplano passando por um ponto $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$ definido pela equação:

$$dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i = 0,$$

onde p_i são números reais. O **conjunto dos elementos de contato** pode ser identificado com $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n-1}$ utilizando as seguintes coordenadas $(x_1, \dots, x_{n-1}, z, p_1, \dots, p_{n-1})$.

O elemento de contato divide o espaço \mathbb{R}^n em dois semi-espacos, onde a escolha de um destes semi-espacos é o que chamamos **co-orientação** do elemento de contato.

Exemplo: Seja $p_0 = (x_1, z) \in \mathbb{R}^2$, pela definição acima temos $dz - p_1 dx_1 = 0$, isto é, $dz = p_1 dx_1$. Sendo assim $\int dz = \int p_1 dx_1$, daí $z = p_1 x_1 + c$, onde c é uma constante real. Desta forma concluímos que em \mathbb{R}^2 os elementos de contato são retas.

Da mesma forma que vimos no exemplo acima, podemos concluir que os elementos de contato em \mathbb{R}^3 são planos passando pelos pontos escolhidos.

Definição 2.5. Sejam M uma C^k variedade de dimensão n . O **fibrado tangente** de M é a união de todos os espaços tangentes em cada ponto da variedade M , ou seja,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

onde $T_p M$ é o espaço tangente a M em p .

Definição 2.6. Sejam M uma variedade diferenciável, ξ um subconjunto do fibrado tangente TM , dizemos que ξ é um **campo de planos** se, e somente se, $\xi_p = T_p M \cap \xi$ é um plano para todo $p \in M$.

Exemplo: Considere a 3-variedade $M = \Sigma \times S^1$, onde Σ é uma superfície. Então para cada $p = (x, \theta) \in \Sigma \times S^1$ seja $\xi_p = T_x \Sigma \subset T_p M$. Segue que ξ_p é um campo de planos em M .

Seja N uma 3-variedade e considere α uma 1-forma diferenciável em N , para cada ponto $p \in N$ temos uma aplicação linear

$$\alpha_p : T_p N \rightarrow \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ker(\alpha) : N &\rightarrow T_p N \\ p &\mapsto \ker \alpha(p) \end{aligned}$$

é um plano ou todo $T_p N$. Se supormos que a aplicação nunca tem como núcleo todo $T_p N$, segue que $\xi = \ker \alpha$ é um campo de planos. Sempre será possível representar um campo de planos como núcleo de uma 1-forma.

Definição 2.7. *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$, uma 1-forma α em M é uma **forma de contato** se*

$$\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n \neq 0, \forall p \in M.$$

Definição 2.8. *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$. Um campo de hiperplanos ξ em M chama-se **estrutura de contato** se para cada ponto p existem uma vizinhança V de p e uma forma de contato α tal que $\xi|_V = \ker(\alpha)$. O par (M, ξ) é chamado **variedade de contato**.*

Definição 2.9. *Uma estrutura de contato ξ é **transversalmente orientável** se é dada globalmente por alguma forma de contato α , isto é, $\xi = \ker(\alpha)$.*

A seguir veremos alguns exemplos de formas de contato.

Exemplo: Em $M = \mathbb{R}^3$, a 1-forma diferenciável $\lambda = dz - ydx$ é uma estrutura de contato.

De fato,

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(1) \wedge dz - dy \wedge dx \\ d\lambda &= -dy \wedge dx \\ d\lambda &= dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda \wedge d\lambda = (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy)$$

$$\lambda \wedge d\lambda = dz \wedge dx \wedge dy$$

$$\lambda \wedge d\lambda \neq 0.$$

A estrutura de contato dada pelo núcleo da 1-forma acima é conhecida como **estrutura de contato canônica** e denotada por ξ_{can} .

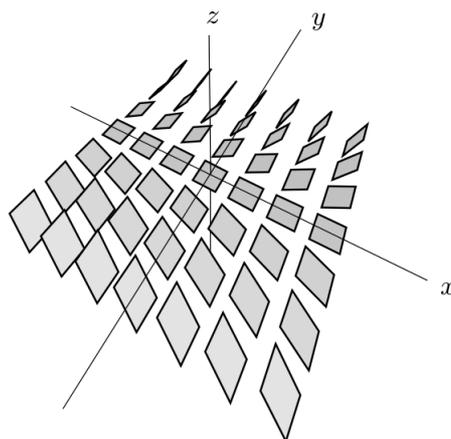


Figura 2.1: Estrutura de Contato Canônica em \mathbb{R}^3 .

Note que o campo de planos ao longo do plano xz são todos horizontais, isto é, são todos paralelos ao plano xy , para observarmos tal fato basta notar que se $y = 0$ temos $\lambda = dz$, desta forma $\ker(dz) = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3; dz(v_1, v_2, v_3) = 0\}$, sendo assim os vetores de $\ker(dz)$ são da forma $(v_1, v_2, 0)$. Tomando agora $y = k$ e solucionado a equação $dz - kdx = 0$ percebemos que se nos deslocarmos ao longo do eixo y , partindo da origem, temos inicialmente um plano horizontal que conforme nos movimentamos no sentido positivo começa a “girar” em torno deste próprio eixo, seguindo a regra da mão esquerda.

Existem várias outras estruturas de contato em \mathbb{R}^3 , mas o **teorema de Darboux**, que enunciaremos a seguir, nos diz que todas estas outras estruturas são localmente iguais a estrutura padrão.

Teorema 2.10 (Darboux). *Sejam α uma forma de contato em uma variedade M de dimensão $(2n + 1)$ e p um ponto de M . Então existem coordenadas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$ em uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que*

$$\alpha|_U = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j$$

O teorema de Darboux nos diz que todas as estruturas de contato são “parecidas” com as a estrutura canônica ξ_{can} . Assim toda estrutura de contato na vizinhança de uma 3-variedade tem o mesmo comportamento que a estrutura canônica em \mathbb{R}^3 .

Vejamos a seguir alguns outros exemplos de estruturas de contato.

Exemplo: Seja $\alpha = dz + xdy - ydx$ ou em coordenadas cilíndricas $\alpha = dz + r^2d\theta$. O núcleo $\ker(\alpha)$ é uma estrutura de contato. De fato, $d\alpha = 2dx \wedge dy$, logo $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$.

A estrutura de contato dada no exemplo acima é uma versão simétrica de ξ_{can} , veja a figura a seguir:

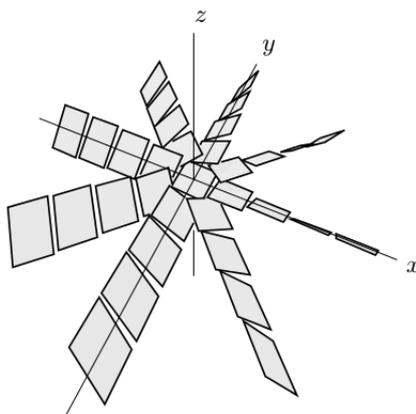


Figura 2.2: Estrutura de Contato ξ_{sim} em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.11. Duas variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são ditas **contactomorfas** se existe um difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ tal que

$$Df(\xi_1) = \xi_2,$$

onde $Df : TM_1 \rightarrow TM_2$ denota a derivada de f . Se as estruturas de contato são dadas por $\xi_i = \ker(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$, então equivalentemente as variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são ditas contactomorfas se existem, um difeomorfismo f e uma aplicação $g : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, com $g(p) \neq 0, \forall p \in M_1$, tais que $f^*\lambda_2 = g\lambda_1$, neste caso f é chamado de **contactomorfismo**.

Definição 2.12. Seja M uma variedade de dimensão 3. Uma estrutura de contato ξ em M é dita **paralelizável** se o seu campo de hiperplanos é subjacente, isto é, se existem dois campos de vetores X e Y tais que em todo ponto $p \in M$, $X(p)$ e $Y(p)$ formam uma base de ξ_p .

Os exemplos de estruturas de contato que vimos até agora, são de certa forma iguais, isto é, ξ_{can} e ξ_{sim} são contactomorfas. De fato, consideremos \mathbb{R}^3 com as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , desta forma

$$d(z + xy) - 2ydx = dz + xdy - ydx = dz + r^2d\theta.$$

Logo, $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x, 2y, z + xy)$ é um contactomorfismo entre ξ_{can} e ξ_{sim} . Sendo assim podemos escolher com qual destas estruturas vamos trabalhar, já que dependendo do caso pode ser mais conveniente trabalharmos com uma do que com outra.

Exemplo: Em \mathbb{R}^3 , utilizando as coordenadas cilíndricas, consideremos $\alpha = \cos(r)dz + r\sin(r)d\theta$. A estrutura de contato $\xi_{ot} = \ker(\alpha)$ é mostrada na figura a seguir.

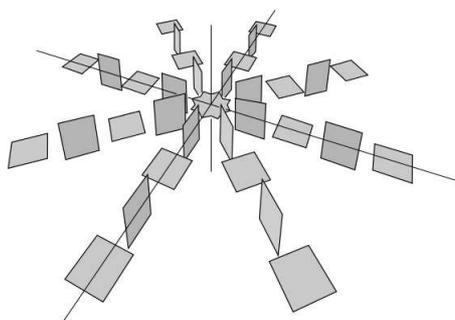


Figura 2.3: Estrutura de Contato ξ_{ot} em \mathbb{R}^3 .

2.2 Nós Legendreanos

Nesta seção temos como principal objeto de estudo os **nós legendreanos**. Veremos alguns resultados específicos, mas que já nos são familiares, por termos estudados os nós topológicos. Noções como os movimentos de Reidemeister, isotopia e diagramas ganham espaço nesta seção, porém cada qual com sua especificidade, buscando respeitar as estruturas de contato, estudadas na seção anterior.

Definição 2.13. Um **nó legendreano** L em uma variedade de contato (M^3, ξ) é um mergulho do círculo S^1 em (M^3, ξ) que é sempre tangente a ξ , isto é, $T_p L \in \xi_p, \forall x \in L$.

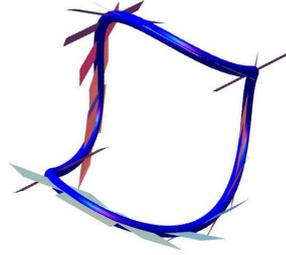


Figura 2.4: Nó legendreano trivial.

Definição 2.14. *Sejam $K_0, K_1 : S^1 \rightarrow M$ nós legendreanos e $I = [0, 1]$. Dizemos que K_0 e K_1 são isotópicos por **isotopia legendreana** se existe uma isotopia $h : S^1 \times I \rightarrow M$ entre K_0 e K_1 , onde $h_t : S^1 \rightarrow M$ é um nó legendreano para cada $t \in I$. Neste caso h chama-se **isotopia legendreana**.*

De agora em diante utilizaremos apenas a variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Esta escolha é feita por dois motivos:

Primeiro pelo teorema de Darboux, que nos garante, como já observado anteriormente, que todas as estruturas de contato são localmente “parecidas” com $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.

Em segundo, quando estudamos esta variedade de contato podemos fazer uso de duas projeções que nos ajudam a entender melhor os nós legendreanos, e assim criar certa “intimidade” com esta teoria.

Existem duas maneiras de representarmos os nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, uma delas é via **projeções frontais** e a outra via as **projeções lagrangianas**. Estudaremos inicialmente as projeções frontais.

Definição 2.15. *Sejam K um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ e $\pi_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção dada por $\pi_F(x, y, z) = (x, z)$. A imagem $\pi_F(K)$ é chamada **projeção frontal** de K .*

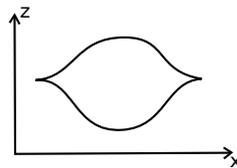


Figura 2.5: Projeção frontal do nó legendreano trivial.

Definição 2.16. *Um nó legendreano K é **genérico** se $\pi_F(K)$ é uma projeção regular e o conjunto*

$$X = \{t \in S^1; x'(t) = 0\},$$

é discreto e além disso, $x''(t) \neq 0$ para todo $t \in X$. Os pontos tais que $x'(t) = 0$ são chamados **pontos de cúspides**.

Consideremos $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização do nó legendreano K definida por

$$k(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Suponhamos que k seja uma imersão de classe C^1 , por definição segue que $k' \in \xi_{can}(k(t))$. Por outro lado $\xi_{can} = \ker(dz - ydx)$, daí segue que

$$z'(t) - y(t)x'(t) = 0. \quad (2.1)$$

Note que $\pi_F(k) = \pi_F(k(t)) = (x(t), z(t))$ pode não ser uma imersão, ainda que k seja, pois de 2.1 temos que se $x'(t) = 0$ então $z'(t) = 0$.

Logo afim de que $\pi_F(k)$ seja uma imersão devemos ter $x'(t) \neq 0$.

Observe que qualquer imersão de $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode possuir tangentes verticais, daí uma primeira diferença observada ao estudarmos as projeções frontais é a que segue:

P_{F_1} – Projeções frontais não possuem tangências verticais.

Tal como para os nós topológicos, faremos uso de diagramas, que funcionará de maneira análoga a definida no capítulo 1.

Da projeção de um nó, perdemos a informação sobre sua localização em \mathbb{R}^3 , afim de recuperar esta informação, indicaremos qual arco está por baixo e qual está por cima, observe a figura abaixo:

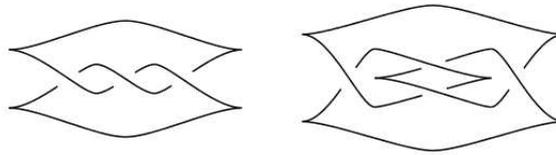


Figura 2.6: Diagramas dos nós legendreanos Trefoil e Figura-Oito.

Utilizando o que vimos até agora, temos condições de provar o seguinte:

Teorema 2.17. *Seja $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um nó legendreano genérico, então K pode ser reobtido de sua projeção frontal $\pi_F(k(t)) = (x(t), z(t))$.*

Demonstração. Para os pontos $t \in S^1$ tais que $x'(t) \neq 0$ segue de $z'(t) - y(t)x'(t) = 0$ que

$$y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)}$$

e para os pontos $t_0 \in S^1$ tais que $x'(t) = 0$ façamos

$$y(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z'(t)}{x'(t)},$$

este limite existe pela regra de L'Hospital. \square

Existem nós legendreanos tais que $x'(t) = 0$ para t em algum intervalo aberto $I = (a, b)$, neste caso temos um fenômeno instável. Entretanto podemos “suavizar” o ponto de cúspide na projeção, este procedimento pode ser feito através de uma isotopia legendreana no arco em que $x'(t) = 0$, veja figura 2.13.

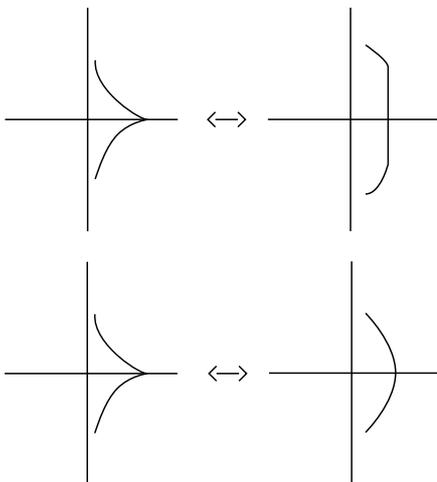


Figura 2.7: Suavização de um ponto de cúspide.

Sendo assim, para um nó legendreano K podemos dizer que $x'(t) = 0$ apenas em pontos isolados. Logo temos uma segunda propriedade das projeções frontais:

P_{F_2} - Projeções frontais podem ser parametrizadas por aplicações que são imersões, a menos de um número finito de pontos. Tais pontos são chamados **cúspides generalizadas**.

Teorema 2.18. *Para qualquer nó topológico K existe uma aproximação C^0 por um nó legendreano. Em particular existem nós legendreanos representando qualquer nó topológico.*

Demonstração. Consideremos a variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, mostremos que qualquer tipo de nó pode ser representado por um nó legendreano. Considere o

diagrama qualquer de um certo nó K (ver figura 2.8), em seguida faça as modificações mostradas na figura 3.9 e então use o procedimento para recuperar um nó legendreano. O problema para a construção de um nó legendreano utilizando este procedimento é que certamente não temos uma aproximação C^0 para o nó original, que se dá por conta da diferença entre a coordenada y do nó original e do nó legendreano determinada pela projeção frontal, mas este problema pode ser resolvido com a ideia ilustrada na figura 2.10, fazendo uma aproximação C^0 por um arco legendreano.

Por fim, utilizando o teorema de Darboux (toda estrutura de contato é localmente a mesma que $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$) generaliza-se a prova para qualquer 3-variedade de contato. \square

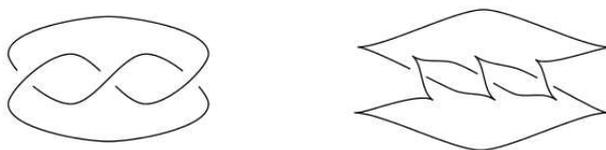


Figura 2.8: Convertendo o diagrama da esquerda no diagrama frontal a direita.

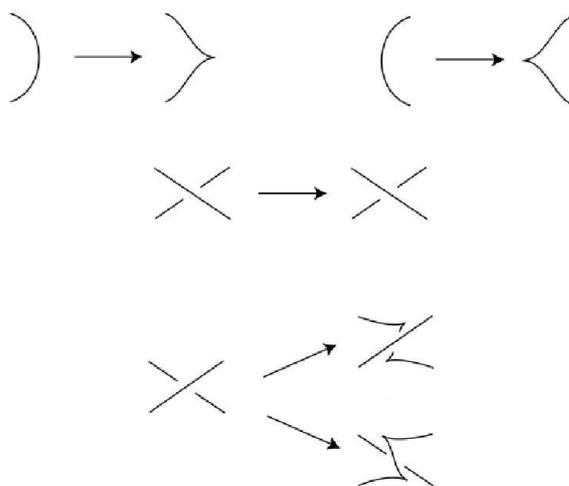


Figura 2.9: Transformando um nó topológico em um nó legendreano.

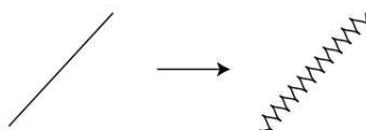


Figura 2.10: Aproximação C^0 por um arco legendreano.

2.2.1 Movimentos de Reidemeister para Nós Legendreanos

No que segue veremos os **movimentos de Reidemeister** para nós legendreanos, tal como para os nós topológicos estes movimentos são de grande importância, já que podemos relacioná-los com as isotopias legendreanas e assim mostrar se dois nós são ou não “iguais” através de uma sequência destes movimentos. Contudo nem sempre é fácil mostrar se dois nós são ou não isotópicos utilizando apenas os movimentos de Reidemeister, para isso faremos uso de ferramentas mais precisas, os invariantes de nós legendreanos.



Figura 2.11: Movimento R_1 , que cria ou exclui um cruzamento e retira ou adiciona duas cúspides.

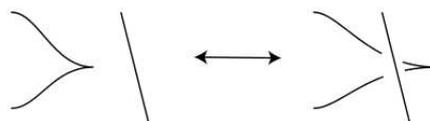


Figura 2.12: Movimento R_2 , que desloca um arco horizontalmente.

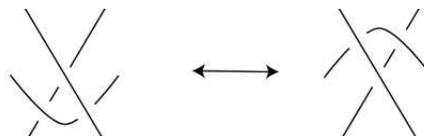


Figura 2.13: Movimento R_3 , que desloca um arco verticalmente.

Teorema 2.19. [9] *Dois nós legendreanos K_1 e K_2 são legendreanamente isotópicos se, e somente se, suas projeções frontais podem ser relacionadas por uma sequência de movimentos de Reidemeister e isotopias planares que não admitem tangentes verticais.*

Na figura 2.14 temos um exemplo, onde mostramos que dois nós são legendreanamente isotópicos através de uma sequência de movimentos de Reidemeister para nós legendreanos.

Na sequência estudaremos as **projeções lagrangeanas**, e veremos algumas de suas propriedades.

Definição 2.20. *Sejam K um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ e $\pi_L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção definida por $\pi_L(x, y, z) = (x, y)$. A imagem $\pi_L(K)$ é chamada **projeção lagrangeana** de K .*

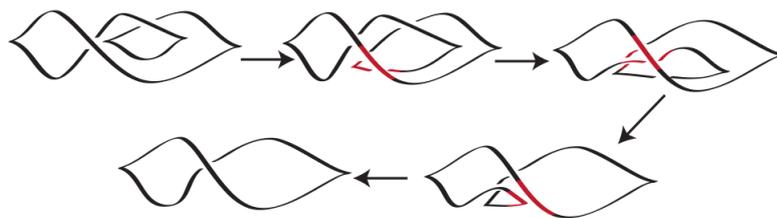


Figura 2.14: Movimentos de Reidemeister

Considerando $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização do nó legendreano K definida por

$$k(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

podemos dizer que diferente das projeções frontais as projeções lagrangeanas

$$\pi_L \circ K = \pi_L(k(t)) = k_{\pi_L}(x(t), y(t))$$

sempre podem ser parametrizadas por uma imersão. Isto nos garante o seguinte:

Teorema 2.21. *Seja $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um nó legendreano. Se k é uma imersão, então sua projeção lagrangeana k_{π_L} é uma imersão. O nó k pode ser reobtido (a menos de translação vertical) de k_{π_L} por:*

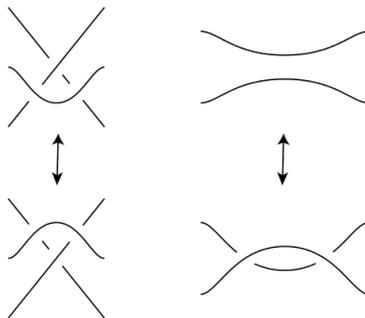
$$z(t) = z(0) + \int_0^t y(t)x'(t)dt$$

Demonstração. Da equação $z'(t) - y(t)x'(t) = 0$, se $x'(t) = 0$ então $z'(t) = 0$. Sendo k uma imersão segue que $y'(t) \neq 0$, daí k_{π_L} é uma imersão.

Para obter a fórmula acima basta integrar $z'(t) = y(t)x'(t)$. □

Para as projeções lagrangeanas temos uma forma mais “fraca” de relacionarmos os movimentos de Reidemeister com uma isotopia legendreana.

Teorema 2.22. [9] *Dois diagramas legendreanos representam nós legendreanamente isotópicos se estes diagramas estão relacionados por uma sequência de movimentos mostrados na figura a seguir:*



2.3 Número de Thurston-Bennequin e número de Maslov

Nesta seção vamos considerar apenas o nós legendreanos orientados. Os invariantes estudados nesta seção, são conhecidos como invariantes clássicos, são eles o **número de Thurston-Bennequin** e o **número de Maslov**.

Utilizando o par (tb, μ) de invariantes, onde tb é o número de Thurston-Bennequin e μ é o número de Maslov, temos um refinamento na questão de identificação dos nós legendreanos.

Os invariantes introduzidos nesta seção são definidos para nós homólogos a zero.

Definição 2.23. *Dados dois nós orientados K e K' em \mathbb{R}^3 , o **número de enlaçamentos** é dado por:*

$$lk(K, K') = \frac{1}{2} \sum_{p \in K \cap K'} c_p,$$

onde $K \cap K'$ denota o conjunto dos cruzamentos de K sobre K' no diagrama de $K \cup K'$ e

$$c_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento positivo} \\ -1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento negativo} \end{cases}.$$

Consideremos um nó legendreano K , ao movermos K na direção positiva ou negativa do campo de vetores normais v de K , no campo de hiperplanos ξ de forma que $\{k', v\}$ é a orientação positiva de ξ ao longo de K (onde k é uma parametrização de K) obteremos dois novos nós, K_+ e K_- respectivamente. Intuitivamente o número de Thurston-Bennequin mede a quantidade de "giros" de ξ em torno de K . No que segue temos um significado mais preciso para este invariante clássico.

Definição 2.24. Seja K um nó legendreano na variedade de contato (M, ξ) , com ξ orientada. O **número de Thurston-Bennequin** é definido por

$$tb(K) = lk(K, K_+),$$

onde $lk(K, K_+)$ é o número de enlaçamento de K com K e K_+ .

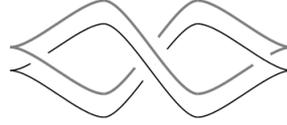


Figura 2.15: Nó K (preto) e nó K_+ (cinza) usado para calcular o número de Thurston-Bennequin.

Vejamos como calcular o número de Thurston-Bennequin para os diagramas frontais.

Proposição 2.25. [18] O número de Thurston-Bennequin de um diagrama frontal D de um nó legendreano K é calculado da seguinte forma:

$$tb(D) = w(D) - \frac{1}{2}(\text{número de cúspides}),$$

onde $w(D) = \sum_{p \in C} c_p$, C é o conjunto de todos os cruzamentos no diagrama de K e

$$c_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento positivo} \\ -1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento negativo} \end{cases}.$$

O número $w(D)$ é também conhecido como a **torção** de K .

Demonstração. Seja $v = \frac{\partial}{\partial z}$ em \mathbb{R}^3 . Assim v é um campo de vetor transversal a ξ ao longo de K . Temos que $tb(K)$ é o enlaçamento de K com K_+ . O número de enlaçamentos de K e K_+ é necessariamente a metade das vezes que as projeções que as projeções $\pi_F(K)$ e $\pi_F(K_+)$ se intersectam. Observe que cada cruzamento de $\pi_F(K)$ dá duas interseções de $\pi_F(K)$ e $\pi_F(K_+)$, ambas com o mesmo sinal de cruzamento. Em uma cúspide positiva ou negativa de $\pi_F(K)$ haverá um cruzamento negativo de K e K_+ . Portanto na projeção frontal temos $tb(D) = w(D) - \frac{1}{2}(\text{número de cúspides})$. \square

Exemplo: Calculemos o número de Thurston-Bennequin para o diagrama frontal T , do nó trefoil:

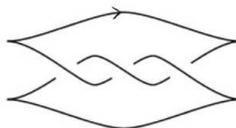


Figura 2.16: Diagrama frontal do nó trefoil.

Neste diagrama temos quatro cúspides e três cruzamentos positivos, desta forma $tb(T) = 3 - (1/2)4 = 1$.

Proposição 2.26. *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano K temos:*

$$tb(K) = w(K).$$

Demonstração. O número $tb(K)$ é definido por $lk(K, K_+)$, assim na projeção lagrangeana, se ao levantarmos K_+ e este não intersectar K então o número de enlaçamentos deles é zero.

Além disso, cada cruzamento do diagrama de K contribui em (± 1) para o número de enlaçamento. Logo segue o resultado. \square

O resultado a seguir nos mostra que o número de Thurston-Bennequin é um invariante sobre a isotopia legendreana.

Teorema 2.27. [18] *O número de Thurston-Bennequin é invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

Demonstração. Se utilizarmos o movimento R_1 , adicionamos ou removemos duas cúspides e um cruzamento positivo, produzindo assim uma mudança líquida de zero. Assim o movimento R_1 não muda o número de Thurston-Bennequin.

Utilizando o movimento R_2 , perdemos um cruzamento positivo e um negativo, produzindo uma mudança líquida de zero, logo também não há mudanças no número de Thurston-Bennequin.

Por fim, se executarmos o movimento R_3 perdemos um cruzamento positivo e um negativo, mas por outro lado adicionamos um cruzamento positivo e um negativo, também produzido uma mudança líquida de zero, o que mais uma vez não altera o número tb . Portanto o número de Thurston-Bennequin tb é um invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal. \square

A seguir veremos outro invariante clássico, o **número de Maslov**.

Sendo assim, consideremos K um nó legendreano orientado na variedade de contato (M, ξ) , com ξ transversalmente orientada e paralelizável e Σ_K a superfície de Seifert de K . Restringindo o campo de planos ξ a superfície Σ_K obtemos um campo de planos trivial $\xi|_{\Sigma_K}$. Esta trivialização do campo de planos $\xi|_K$ induz uma trivialização $\xi|_K = L \times \mathbb{R}^2$.

Como K é orientado podemos tomar o campo de vetores tangentes K' a K , na direção da orientação de K . Como K é legendreano o campo de vetores K' está em $K \times \mathbb{R}^2$. Desta forma podemos pensar em K' como um caminho de vetores não nulos.

Logo o campo de vetores K' tem um número de giros em $\xi|_K$ com respeito a trivialização.

Definição 2.28. *O número de Maslov, denotado por $\mu(K)$ é o número de giros de K' em $\xi|_K$.*

O cálculo do número de Maslov, utilizando as projeções frontais e lagrangeanas é feito de maneira bem simples. No que segue consideremos **cúspides subindo** e **cúspides descendo** de acordo com a figura 2.17:

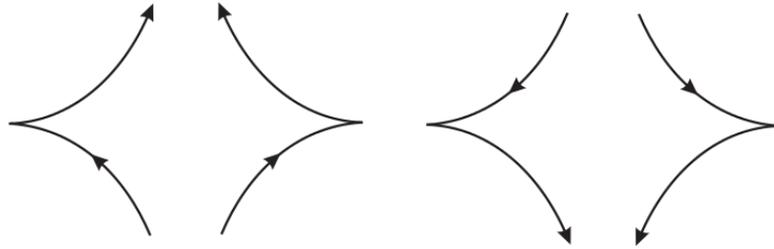


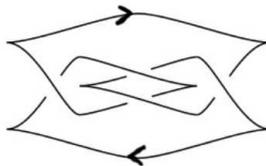
Figura 2.17: Cúspides subindo a esquerda e cúspides descendo a direita.

Proposição 2.29. [9] *Na projeção frontal de um nó legendreano orientado K o número de Maslov é dado por:*

$$\mu(K) = \frac{1}{2}(C_+(K) - C_-(K)),$$

onde $C_+(K)$ e $C_-(K)$ são os números de cúspides subindo e descendo respectivamente.

Exemplo: Calculemos o número de Maslov para o diagrama frontal D , do nó legendreano figura-oito:



Observe que neste diagrama temos três cúspides subindo e três cúspides descendo, logo $\mu(D) = \frac{1}{2}(3 - 3) = 0$.

O resultado a seguir nos mostra como o número de Maslov se comporta perante as projeções lagrangeanas.

Proposição 2.30. *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano orientado K tem-se*

$$\mu(K) = \text{número de giros de } \pi_L(K).$$

Demonstração. Seja $w = \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{R}^3 . Na projeção lagrangeana w projeta a $\frac{\partial}{\partial y}$.

Assim o número de Maslov é visto como número de giros do vetor tangente a $\pi(K)$ no plano xy . \square

Proposição 2.31. *O número de Maslov de um nó legendreano orientado é um invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

Demonstração. Os movimentos R_2 e R_3 não alteram o número de cúspides subindo e nem o número de cúspides descendo, basta então verificarmos a invariância sobre o primeiro movimento.

Não obstante a orientação, o movimento R_1 adiciona ou remove uma cúspide subindo e uma descendo, mas nenhuma adição ou remoção muda o número de Maslov, portanto este é um invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal. \square

O resultado que enunciaremos a seguir é de extrema importância neste trabalho, e nossa preocupação será prová-lo, para isso estudaremos um novo invariante que será definido no capítulo seguinte. A prova deste teorema está feita em [5] e não é simples, contudo este resultado nos diz que os invariantes clássicos da teoria de nós legendreanos não são completos.

Teorema 2.32. *Existem nós legendreanos K e K' com o mesmo par de invariantes clássicos mas que não são legendreanamente isotópicos.*

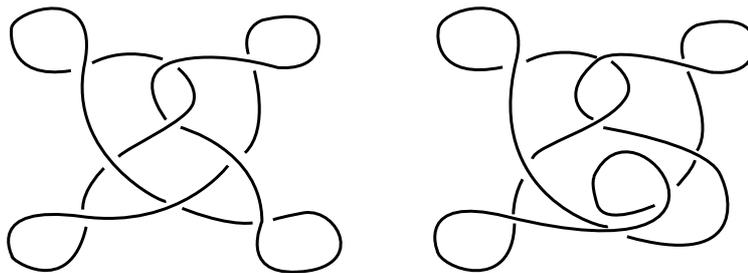


Figura 2.18: Nós K (a esquerda) e K' (a direita) com número de Thurston-Bennequin $tb = 1$ e número de Maslov $\mu = 0$.

O próximo resultado mostra porque os invariantes de Vassiliev para nós legendreanos não são úteis para a classificação de nós legendreanos por classes de isotopia.

Teorema 2.33. *Nós Legendreanos topologicamente isotópicos com números de Bennequin e Maslov iguais não são distinguidos por invariantes do tipo finito.*

Desta forma o estudo de invariantes de nós legendreanos é feito utilizando invariantes do tipo infinito, ainda que em alguns casos pode-se associar aos invariantes de Vassiliev.

Capítulo 3

Invariantes Combinatórios de nós legendreanos

Neste capítulo vamos discutir um novo invariante de nós legendreanos, definido nos últimos anos. Mais precisamente vamos estudar a Álgebra Graduada Diferencial (Differential Graded Algebra - DGA) obtida por Chekanov em 2002, no artigo *Differential algebra of legendrian links* [5].

Através da graduação desta álgebra construiremos o polinômio de Poincaré associado a cada nó legendreano, que será utilizado para mostrar que se duas álgebras não possuem o mesmo tipo estável consequentemente terão os nós associados a ela não isotópicos.

A obtenção deste novo invariante em geral, é mais “complexa” do que os invariantes estudados até aqui, contudo é um invariante muito importante e tem sido objeto de estudo em vários artigos recentes ([9], [17] e [10]).

O objetivo principal deste capítulo é mostrar que o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov, os invariantes clássicos, não são invariantes completos para nós legendreanos. Fazemos isso apresentando o primeiro exemplo de dois nós com mesmo número tb e μ que não são isotópicos, este exemplo foi dado por Chekanov em [5]

Os invariantes clássicos da Teoria de Nós Legendreanos, número de Maslov e número de Thurston-Bennequin, foram os principais invariantes desta classe de nós até pouco tempo e foram utilizados durante muitos anos.

Os primeiros artigos sobre invariantes polinomiais para nós legendreanos surgiram em meados de 2000 ([9] e [11]). No artigo de Ferrand, por exemplo associa-se um polinômio a um nó legendreanos, e isto é feito aproximando um nó

legendreano de um nó topológico.

Não vamos nos ater a esses invariantes, pois o objetivo deste estudo foge ao nosso propósito, que é analisar o **DGA**(*Differential Graded Algebra*).

3.1 DGA - Álgebra Diferencial Graduada

Definição 3.1. *Um conjunto não vazio A é dito um **anel** se em A estão definidas duas operações, que indicaremos por $+$ e \cdot , respectivamente, tais que, para todos a, b e $c \in A$, verifica-se:*

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$,
2. $a + b = b + a$,
3. *Existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$,*
4. *Para cada $a \in A$, existe $-a \in A$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$,*
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
7. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

Se além disso valer a seguinte propriedade:

8. $a \cdot b = b \cdot a$,

então o anel é dito comutativo.

Definição 3.2. *Seja K um corpo. Uma K -álgebra Λ é um anel $(\Lambda, +, \cdot)$ com unidade que possui uma estrutura de K -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que para todo $k \in K$, e para todos $x, y \in \Lambda$, temos $k(x \cdot y) = (xk) \cdot y = x \cdot (ky) = (x \cdot y)k$.*

A **álgebra diferencial graduada** de Chekanov, que denotaremos por **DGA** é uma teoria desenvolvida para nós legendreanos em \mathbb{R}^3 . Neste capítulo estudaremos a construção original dada por Chekanov que é realizada sobre os projeções lagrangeanas de um nó K .

Seja K um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ cuja projeção lagrangeana $(\pi(K))$ é o diagrama de K que também será denotado por K . Nomearemos os cruzamentos

de K por a_1, \dots, a_n . A DGA associada a K é uma álgebra livre, não comutativa e unitária A sobre \mathbb{Z}_2 gerada por $\{a_1, \dots, a_n\}$ com graduações sobre $\mathbb{Z}/\mu(K)\mathbb{Z}$.

Para definirmos as graduações de A , podemos supor que as projeções utilizadas são genéricas, isto é, possuem apenas pontos duplos transversais. Caso isto não ocorra basta perturbar o diagrama K de modo a obtermos as projeções genéricas.

Seja $g : [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada diferenciável. O **número de rotações** $r(g) \in \mathbb{R}$ é o número de voltas dadas pelos vetores tangentes a curva.

Consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ t &\mapsto P(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} h : [c_1, c_2] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto h(t) = \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \end{aligned} \quad ,$$

$$\tilde{g} : [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

onde \tilde{g} é o levantamento (por P) da aplicação h , ou seja, \tilde{g} é tal que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & S^1 \\ \tilde{g} \uparrow & & \nearrow h \\ [c_1, c_2] & & \end{array}$$

Desta forma,

$$r(g) = \tilde{g}(c_1) - \tilde{g}(c_2).$$

Dado a_i um cruzamento de um diagrama qualquer, consideremos os pontos $z_+, z_- \in K$ tais que $\pi(z_+) = \pi(z_-)$ e $z(z_+) > z(z_-)$. Estes pontos dividem K em duas curvas γ_1 e γ_2 as quais orientamos de z_+ a z_- .

Observação: Sejam $v = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ e $v_1 = (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1)$ vetores tangentes a curva g exatamente em seu ponto duplo, como estamos supondo os cruzamentos do diagrama todos ortogonais, temos:

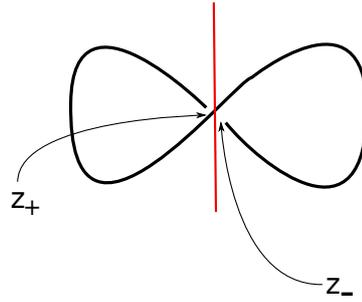


Figura 3.1: Curvas γ_1 (a esquerda) e γ_2 (a direita).

$$\begin{aligned} 2\pi t_1 &= 2\pi t + (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ t_1 &= t + \frac{(2k+1)}{4} \\ t_1 - t &= \frac{2k+1}{4}. \end{aligned}$$

Definição 3.3. Para $\varepsilon \in \{1, 2\}$ o **número de rotações** da curva $\pi(\gamma_\varepsilon)$ é da forma:

$$r(\gamma_\varepsilon) = \frac{N_\varepsilon}{2} + \frac{1}{4},$$

onde $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}$.

Observação: Como estamos utilizando o número de rotações distinto do usual e um levantamento, concluímos que $N_1 - N_2 = \pm\mu(K)$ e desta forma N_1 e N_2 representam o mesmo elemento do grupo $\mathbb{Z}/\mu(K)\mathbb{Z}$.

Definição 3.4. A **graduação** de a_i , denotada por $|a_i|$ é o elemento do grupo $\mathbb{Z}/\mu(K)\mathbb{Z}$ representado por N_1 e N_2 .

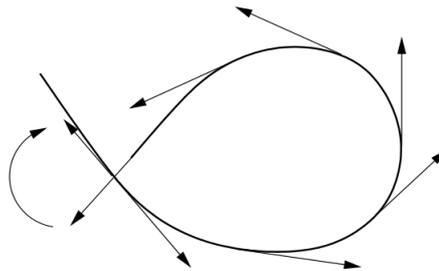
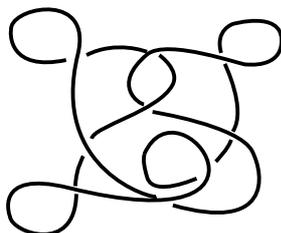
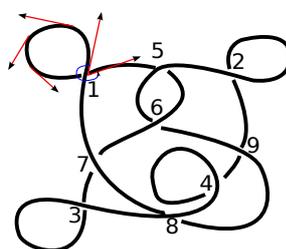


Figura 3.2: Cálculo da graduação de um ponto duplo.

Exemplo: Calculemos as graduações dos cruzamentos dados no diagrama a seguir:

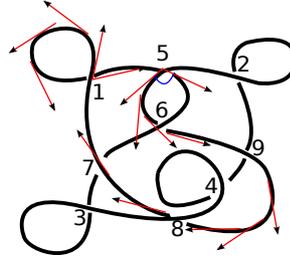


Para o cruzamento a_1 associado ao número 1 indicado no diagrama abaixo temos:



Logo o ângulo (em azul) é $3\pi/2$ daí pela definição 3.3 o número de rotações da curva em questão é dado por $r = 3/4$, desta forma temos $N_\varepsilon/2 + 1/4 = 3/4$, portanto $N_\varepsilon = 1$ e assim $|a_1| = 1$. Utilizando o mesmo raciocínio concluí-se que $|a_1| = |a_2| = |a_3| = |a_4| = 1$.

Para calcularmos o número de rotações de a_5 usaremos a figura a seguir:



Logo o número de rotações da curva acima é $r = 1/4$, desta forma $N_\varepsilon/2 + 1/4 = 1/4$, portanto $N_1 = 0$ e daí $|a_5| = 0$. Utilizando o mesmo raciocínio temos $|a_5| = |a_6| = |a_7| = |a_8| = |a_9|$.

Em alguns textos a graduação de um cruzamento a_i está definida sobre $\mathbb{Z}/2r(K)$ isto se dá ao fato de que o número de Maslov para projeções lagrangeanas é duas vezes o número de rotações $r(K)$ de um nó legendreano K , isto é, $\mu(K) = 2r(K)$.

No que segue definiremos a **diferencial** de um cruzamento a_i , denotada por ∂a_i , existem várias formas de definirmos esta diferencial, porém adotamos aquela com a qual nos sentimos mais confortável para trabalhar.

Observe que em cada cruzamento temos quatro quadrantes os quais nomearemos de acordo com a figura 3.3.

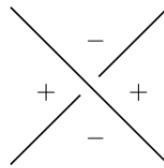


Figura 3.3: Vizinhança de um ponto duplo a_i em $\pi_L(K)$.

Definição 3.5 ([17]). Uma **imersão admissível** sobre a projeção lagrangeana K de um nó legendreano, é uma imersão f do disco D^2 com alguns pontos marcados sobre sua fronteira em \mathbb{R}^2 que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $f(\partial D^2) \subset K$ e $f|_{\partial D^2}$ é diferenciável a menos dos pontos marcados;
- (ii) f aplica os pontos marcados no bordo de D^2 nos cruzamentos de K ;

- (iii) f aplica a vizinhança de um ponto marcado sobre a fronteira de D^2 em exatamente um quadrante de um cruzamento;
- (iv) Dos sinais associados aos quadrantes resultantes por todos os pontos marcados, exatamente um é $+$.

Cruzamentos com sinal $+$ são chamados de **esquinas positivas** de uma imersão admissível e cruzamentos com sinal $-$ são chamados de **esquinas negativas** de uma imersão admissível.

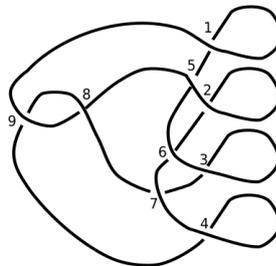
Definição 3.6. Considere uma imersão admissível f com esquina positiva sobre o cruzamento a_i . Associamos a f o monômio $\alpha(f) = a_{j_1} \dots a_{j_l}$, onde a_{j_1}, \dots, a_{j_l} são as esquinas negativas de f . A **diferencial** de a_i é dada por:

$$\partial a_i = \sum_f \alpha(f),$$

onde f percorre todas as imersões admissíveis.

Observação: Se f não possui cantos negativos então $\alpha(f) = 1$.

Exemplo: Calculemos neste exemplo a diferencial do diagrama a seguir:

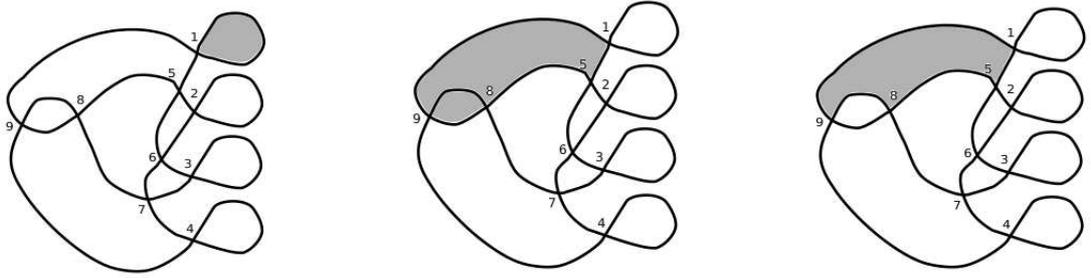


Inicialmente temos que o grau dos geradores são:

$$\begin{aligned} |a_1| &= |a_2| = |a_3| = |a_4| = 1; \\ |a_5| &= |a_6| = |a_7| = 0; \\ |a_8| &= -2; \\ |a_9| &= 2. \end{aligned}$$

As imersões possíveis para a_1 são dadas pela figura a seguir:

$$\text{Logo } \partial a_1 = 1 + a_5 + a_9 a_8 a_5.$$



As figuras a seguir nos dão que:

$$\partial a_2 = 1 + a_6 a_5;$$

$$\partial a_3 = 1 + a_6 a_7;$$

$$\partial a_4 = 1 + a_7 + a_9 a_8 a_7;$$

$$\partial a_i = 0, \text{ para } i = 5, 6, 7, 8, 9.$$

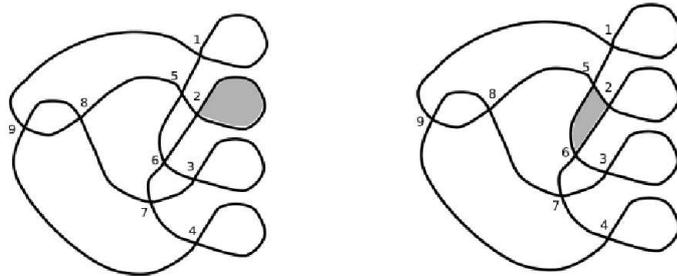


Figura 3.4: Figura utilizada no cálculo de ∂a_2 .

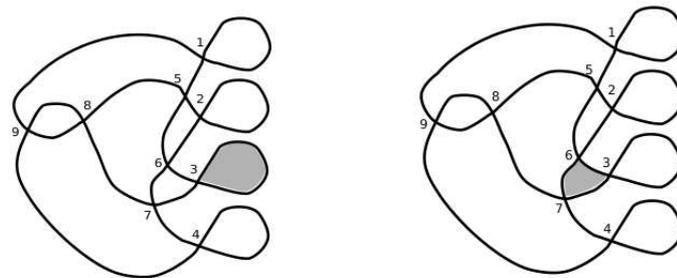


Figura 3.5: Figura utilizada no cálculo de ∂a_3 .

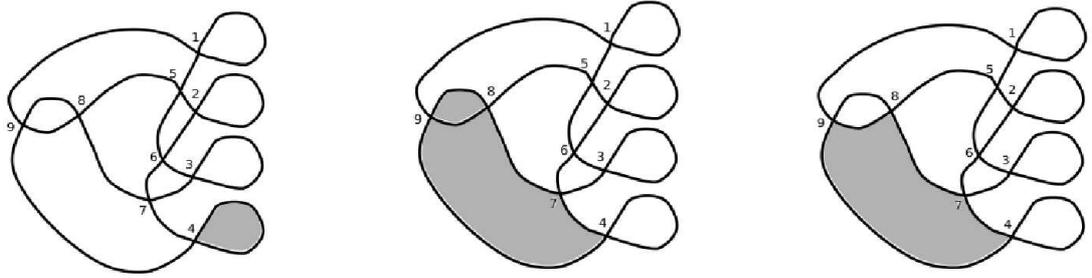
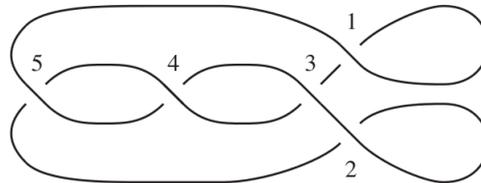
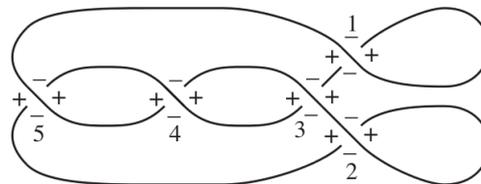


Figura 3.6: Figura utilizada no cálculo de ∂a_4 .

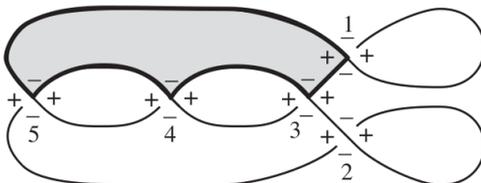
Exemplo: Este exemplo foi retirado de *An Introduction to Invariants of Legendrian Knots* de Sabloff e nele calculemos a graduação e a diferencial para o diagrama do nó trefoil legendreano:



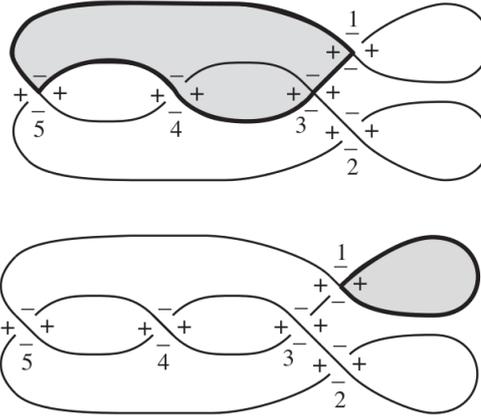
Observe que a álgebra possui cinco geradores, $\{a_1, \dots, a_5\}$ todos com graduação igual a 1, isto é, $|a_i| = 1$, para $i = 1, \dots, 5$. Afim de calcularmos a diferencial nomeamos os quadrantes de acordo com o que foi visto anteriormente.



Os números correspondem aos índices de a , fixemos 1 para calcularmos a diferencial de a_1 .



A figura acima nos dá a componente $a_5 a_4 a_3$ de ∂a_1 , observe que devemos percorrer o sentido anti-horário na imersão admissível encontrada. As figuras a seguir nos dão as componentes a_5 e 1 respectivamente de ∂a_1 .



Seguindo o mesmo raciocínio temos:

$$\partial a_1 = 1 + a_3 + a_5 + a_5 a_4 a_3$$

$$\partial a_2 = 1 + a_3 + a_5 + a_3 a_4 a_5$$

$$\partial a_3 = \partial a_4 = \partial a_5 = 0$$

Observação: Observe que se ao fixarmos uma esquina positiva não existir uma imersão admissível sua diferencial se anula, isto pode ser visto no exemplo acima, onde $\partial a_3 = \partial a_4 = \partial a_5 = 0$.

Exemplo: Este exemplo foi construído por Chekanov em [5] e é o primeiro exemplo de dois nós legendreanos com mesmo número de Thurston-Bennequin e mesmo número de Maslov que não são legendreanamente isotópicos, a projeção lagrangeana destes dois nós são dados na figura a seguir:

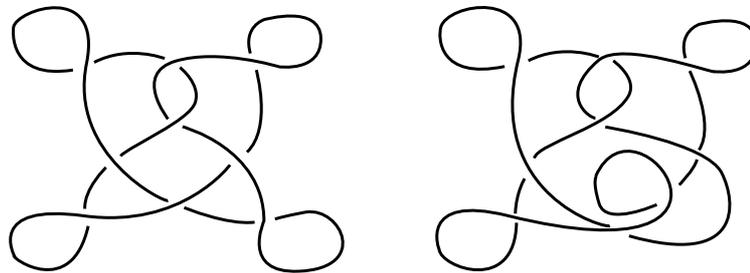


Figura 3.7: Nós K (a esquerda) e K' (a direita) com número de Thurston-Bennequin $tb = 1$ e número de Maslov $\mu = 0$.

A graduação dos geradores da álgebra associada ao nó K é $|a_i| = 1$ para $i = 1, \dots, 4$, $|a_5| = 2$, $|a_6| = -2$, $|a_i| = 0$ para $i \geq 7$, a graduação dos geradores da álgebra associada ao nó K' é $|a_i| = 1$ para $i \leq 4$ e $|a_i| = 0$ para $i \geq 5$.

Mostraremos que estes dois nós possuem diferentes DGA's associadas e para tal calculemos a seguir suas diferenciais.

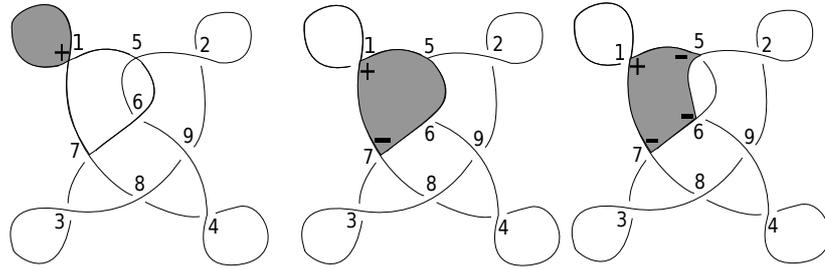


Figura 3.8: Figura utilizada no cálculo de ∂a_1 .

Utilizando a figura 3.8 (e fazendo a construção análoga para os outros geradores) concluímos que:

$$\partial(a_1) = 1 + a_7 + a_7 a_6 a_5,$$

$$\partial(a_2) = 1 + a_9 + a_5 a_6 a_9,$$

$$\partial(a_3) = 1 + a_8 a_7,$$

$$\partial(a_4) = 1 + a_9 a_9,$$

Agora observe que a_5 possui apenas esquinas positivas e portanto a diferencial associada é nula, isto é, $\partial(a_5) = 0$. O mesmo ocorre com a_6, a_7, a_8 e a_9 logo $\partial(a_5) = \partial(a_6) = \partial(a_7) = \partial(a_8) = \partial(a_9) = 0$.

Da mesma forma que fizemos para calcularmos as diferenciais para os geradores da álgebra associada ao nó K , faremos para calcular as de K' . Para tal, utilizaremos a figura a seguir.

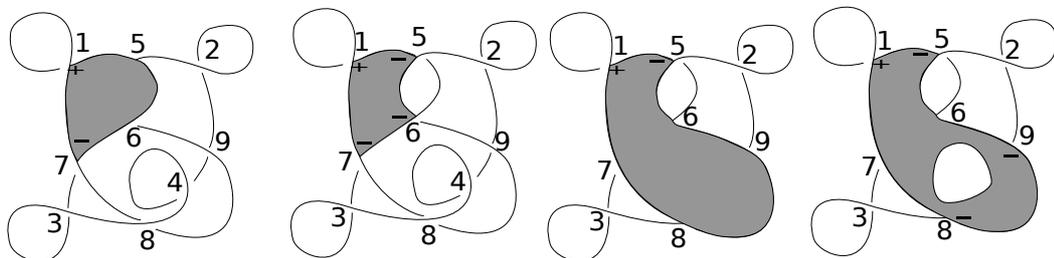


Figura 3.9: Figura utilizada no cálculo de ∂a_1 .

As diferenciais dos geradores da álgebra associada a K' são:

$$\begin{aligned}
\partial(a_1) &= 1 + a_7 + a_5 + a_7a_6a_5 + a_9a_8a_5, \\
\partial(a_2) &= 1 + a_9 + a_5a_6a_9, \\
\partial(a_3) &= 1 + a_8a_7, \\
\partial(a_4) &= 1 + a_9a_9, \\
\partial(a_5) &= \partial(a_6) = \partial(a_7) = \partial(a_8) = \partial(a_9) = 0.
\end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que as DGA's (A_K, ∂_K) e $(A_{K'}, \partial_{K'})$ associadas aos nós K e K' (do exemplo acima) possuem diferentes tipos de estabilidade e portanto estes nós não são legendreanamente isotópicos. As definições e os resultados que seguem, bem como suas demonstrações podem ser consultados em [5].

Definição 3.7. Um automorfismo g de uma álgebra graduada $T(a_1, \dots, a_n)$ é dito **elementar** se para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ temos $g(a_i) = a_i$ quando $i \neq j$ e $g(a_j) = a_j + u$, onde $u \in T(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

Definição 3.8. O **grupo de automorfismos mansos**, G de $T(a_1, \dots, a_n)$ é o grupo gerado pelos automorfismos elementares.

Definição 3.9. Um automorfismo $g : T(a_1, \dots, a_n) \rightarrow T(a'_1, \dots, a'_n)$ que é composição de elementos do grupo G que associam cada a_i a a'_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ é um **isomorfismo manso**.

Teorema 3.10. Sejam (A, ∂) e (A', ∂') álgebras diferenciais graduadas associadas as projeções lagrangeanas dos nós K e K' . Se K e K' são legendreanamente isotópicos então (A, ∂) e (A', ∂') possuem o mesmo tipo estável.

Para a definição a seguir assumiremos que $\partial_0 = 0$, conseqüentemente $\partial_1^2 = 0$. Desde que $\partial(A_1) \subset A_1$, podemos considerar a homologia

$$H(A_1, \partial_1) = \ker(\partial_1|_{A_1}) / \text{Im}(\partial_1|_{A_1}),$$

que é um espaço vetorial gerado por algum grupo cíclico Γ .

Definição 3.11. O **polinômio de Poincaré**, denotado por $P_{(A, \partial)} \in N_0[\Gamma]$, é dado por:

$$P_{(A, \partial)}(t) = \sum_{\lambda \in \Gamma} \dim(H_\lambda(A_1, \partial_1)) t^\lambda,$$

onde $H_\lambda(A_1, \partial_1)$ é o grau λ da componente homogênea de $H(A_1, \partial_1)$ e $N_0[\Gamma]$ é um grupo monoide.

Denotaremos por $Aut_t(A)$ o grupo de gradações dos isomorfismos mansos de uma álgebra graduada livre $A = T(a_1, \dots, a_n)$. Um automorfismo $g \in Aut_t(A)$ é um DGA isomorfismo entre (A, ∂) e (A, ∂^g) , onde $\partial^g = g\partial g^{-1}$.

Definimos o subgrupo $Aut_0(A) \subset Aut_t(A)$ como o subgrupo formado pelos automorfismos g tais que para cada $i = \{1, \dots, n\}$, $g(a_i) = a_i + c_i$, onde $c_i \in A_0$ (observe que $c_i = 0$ sempre que $|a_i| \neq 0$).

Consideremos agora o conjunto $U(A, \partial)$ dos automorfismos $g \in Aut_t(A)$ tais que $\partial_0^g = 0$.

Definição 3.12. $I(A, \partial) = \{P_{(A, \partial^g)} | g \in Aut_0(A) \cap U(A, \partial)\}$.

Temos agora as condições necessárias para enunciar o seguinte resultado:

Lema 3.13. *Se os tipos estáveis de álgebras diferenciais graduadas semi-livres (A, ∂_A) , (B, ∂_B) coincidem então $I(A, \partial_A) = I(B, \partial_B)$.*

Combinando o Lema acima com o teorema 3.10, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.14. *Se dois nós K e K' com projeções lagrangeanas genéricas são legendreanamente isotópicos então $I(K) = I(K')$.*

Finalmente mostraremos que o nós K e K' do exemplo 3.1 não são legendreanamente isotópicos.

Teorema 3.15. *Como $|I(K)| = |I(K')| = 1$, $P_K(t) = t^{-2} + t^1 + t^2$ e $P_{K'} = 2t^0 + t^1$, então K e K' não são legendreanamente isotópicos.*

Demonstração. Consideremos a álgebra diferencial graduada $(A, \partial) = (A_K, \partial_K)$. Tomemos $g \in Aut_0(A)$ dada por $g(a_i) = a_i + c_i$, com $i \in \{1, \dots, 9\}$. Como g é graduada temos $c_i = 0$ para $i \leq 6$. Mais ainda, como $\partial^g(a_i) = g(\partial(a_i))$ então $\partial^g(a_i) = 0$ (quando $i \leq 6$) e

$$\begin{aligned}\partial_0^g(a_1) &= 1 + c_7, \\ \partial_0^g(a_2) &= 1 + c_9, \\ \partial_0^g(a_3) &= 1 + c_7c_8, \\ \partial_0^g(a_4) &= 1 + c_8c_9.\end{aligned}$$

Assumindo $g \in U(A, \partial)$, isto é, $\partial_0^g = 0$, então $c_7 = c_8 = c_9 = 1$. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned}\partial_1^g(a_1) &= a_7, \\ \partial_1^g(a_2) &= a_9, \\ \partial_1^g(a_3) &= a_7 + a_8, \\ \partial_1^g(a_4) &= a_8 + a_9,\end{aligned}$$

e $\partial_1^g(a_i) = 0$ para $i \geq 5$.

A homologia de (A_1, ∂_1^g) é gerada pelos elementos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, a_5 e a_6 cujos graus são 1, 2 e -2 respectivamente. Desta forma, $P_K(t) = t^{-2} + t^1 + t^2$.

Façamos o mesmo para K' . Consideremos agora $(A, \partial) = (A_{K'}, \partial_{K'})$. Consideremos que $g \in U(A, \partial)$, onde $g(a_i) = a_i + c_i$, então

$$\begin{aligned}\partial_0^g(a_1) &= 1 + c_5 + c_7 + c_5c_6c_7 + c_5c_8c_9, \\ \partial_0^g(a_2) &= 1 + c_9 + c_5c_6c_9, \\ \partial_0^g(a_3) &= 1 + c_7c_8, \\ \partial_0^g(a_4) &= 1 + c_8c_9.\end{aligned}$$

A condição $\partial_0^g = 0$ nos dá que $c_7 = c_8 = c_9 = 1$ e $c_5c_6 = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\partial_1^g(a_1) &= a_7 + c_5a_6 + c_6a_5, \\ \partial_1^g(a_2) &= a_9 + c_5a_6 + c_6a_5, \\ \partial_1^g(a_3) &= a_7 + a_8, \\ \partial_1^g(a_4) &= a_8 + a_9,\end{aligned}$$

e $\partial_1^g(a_i) = 0$ para $i \geq 5$. A homologia de (A_1, ∂_1^g) , independentemente dos valores de c_5 e c_6 é gerada pelos elementos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, a_5 e a_6 cujas graduações são 1, 0, 0 respectivamente. Assim $P_K(t) = 2t^0 + t^1$. O que completa a prova do teorema. \square

Corolário 3.16. *Existem nós legendreanos K e K' com o mesmo par de invariantes clássicos mas que não são legendreanamente isotópicos.*

Conclusão

O estudo que realizamos, analisa e descreve um novo invariante de Nós Legendreanos, desenvolvido por Yuri Chekanov em [5], chamado de Álgebra Graduada Diferencial. Este invariante nos auxilia na prova de que os invariantes clássicos desta teoria, o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov não são completos, isto é, nos ajudam a mostrar que existem nós que não são legendreanamente isotópicos mas possuem mesmo par de invariantes clássicos.

No decorrer da pesquisa foram necessárias a utilização de algumas ferramentas da Topologia e da Teoria de Contato, sendo esta última área de estudo da Geometria de Contato. Para uma análise mais detalhada destas ferramentas temos um capítulo deste trabalho, onde demos uma introdução detalhada de seu uso e estabelecemos algumas de suas propriedades, estas por sua vez indispensáveis no estudo de Nós Legendreanos.

Esta dissertação fornece um material para quem deseja ter um primeiro contato com a Teoria de Nós e a Teoria de Nós Legendreanos, além de permitir acesso a temas bastante avançados da Matemática e que têm sido objetos de pesquisa na atualidade.

Referências Bibliográficas

- [1] C. C. ADAMS, *The knot book: na elementary introduction to the mathematical theory of knots*. **American Mathematical Society**, Rhode Island, 2004.
- [2] V. I. ARNOLD, *The Vassiliev Theory of Discriminants and Knots*. **First European Congress of Mathematics Progress in Mathematics**, Vol. 3, 3-29, 1994.
- [3] D. BAR-NATAN, *On the Vassiliev knot invariants*. **Topology**, 34, 423-471, 1995.
- [4] J. S. BIRMAN and X. LIN, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*. **Inventiones Mathematicae**, 111, 225-270, 1993.
- [5] YU. V. CHEKANOV, *Differential algebra of Legendrian links*. **Inventiones Mathematicae**, 150, 441-483, 2002.
- [6] YU. V. CHEKANOV, *Invariants of Legendrian Knots*. <http://arxiv.org/pdf/math/0304294.pdf>, 2003.
- [7] S. CHMUTOV, S. DUZHIN and J. MOSTOVOY, *Vassiliev Knot Invariants*, <http://arxiv.org/abs/1103.5628v3>, 2011.
- [8] S. M. M. DIAS, *Introdução à Teoria dos Nós*, **Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho**, 2004.
- [9] J. B. ETNYRE, *Legendrian and Transversal Knots*, 1-57, <http://people.math.gatech.edu/~etnyre/preprints/papers/legsur.pdf>
- [10] J. B. ETNYRE and L. L. NG, *Problems in Low Dimensional Contact Topology*. 2001 Georgia International Topology Conference, **AMS/IP Studies in Advanced Mathematics**, v. 35, 335-354, 2003.

- [11] E. FERRAND, *On Legendrian Knots and Polynomial Invariants*, **Proceedings of The American Mathematical Society Volume**, V130 n^o 4, 1169-1176, 2001.
- [12] D. FUCHS and S. TABACHNIKOV, *Invariants of Legendrian and Transverse Knots in the Standard Contact Space*. **Topology**, v. 36, n^o 5, 1025-1053, 1997.
- [13] D. FUCHS, *ChekanovEliashberg invariant of Legendrian knots: existence of augmentations*, **Journal of Geometry and Physics**, 47, 43-65, 2003.
- [14] P. GHIGGINI, *Introduction to Legendrian knots and Legendrian contact homology*, 1-26, http://ecolegstg-cimpa2012.uh2c.ac.ma/LecturesNotes/notes-prov_ghiggini.pdf, 2012.
- [15] V. V. GORYUNOV, *Plane curves, wavefronts and Legendrian knots*. **Phil. Trans. of Royal Soc. London A**, 359, 1497-1510, 2001.
- [16] A. KAWAUCHI, *A Survey of Knot Theory*. **Birkhauser**, Basel, 1996.
- [17] L. L. NG, *Invariants of Legendrian Links*. **Thesis submitted for degree of Doctor of Philosophy, Massachusetts Institute of Technology**, United States of America, 2001.
- [18] R. R. B. PORTELA, *Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes.*, **Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**, 2007.
- [19] P. E. PUSHKAR and YU. V. CHEKANOV, *Combinatorics of Fronts of Legendrian Links and the Arnold 4-Conjectures*. **Usp. Mat. Nauk**, 60 (1), 99154, 2005 [**Russ. Math. Surv.** 60, 95149, 2005].
- [20] J. M. SABLOFF, *Invariants of Legendrian Knots in Circle Bundles*. 1-49, <http://arxiv.org/abs/math/0208214v1>
- [21] V. TCHERNOV, *Isomorphism of the Groups of Vassiliev Invariants of Legendrian and Pseudo-Legendrian Knots*. **Compositio Mathematica**, 135, 103-122, 2003.
- [22] V. VASSILIEV, *Complements of discriminants of smooth maps*. **Topology and its Applications**. AMS, Providence, 1992.