14/4/2010 – ALGA-1: Exercícios Resolvidos – Superfícies Quádricas

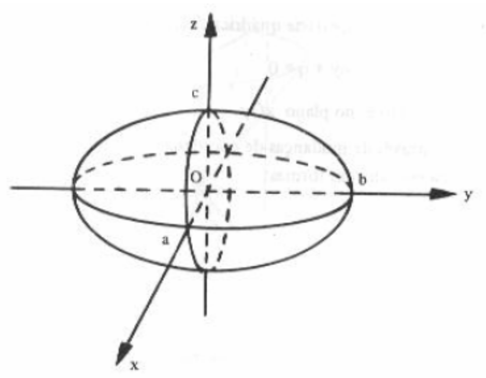
* Do **Livro** de Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, Paulo Winterle.

---

1 – Revisão de conteúdo.
2 – Veja alguns exemplos gráficos de superfícies geradas a partir do computador. Partindo de exercícios mais simples, e seguindo até as formas mais complicadas.

Uma brevíssima revisão das equações e dos gráficos de superfícies:

Elipsóide:



Centro C(0, 0, 0):

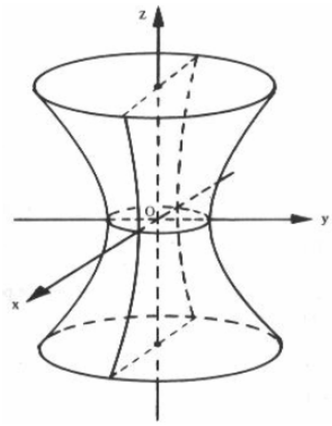
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

O sinais da equação são positivos.
a, b e c são os eixos das elipses.

Centro C(h, k, l):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Hiperbolóide de uma folha:



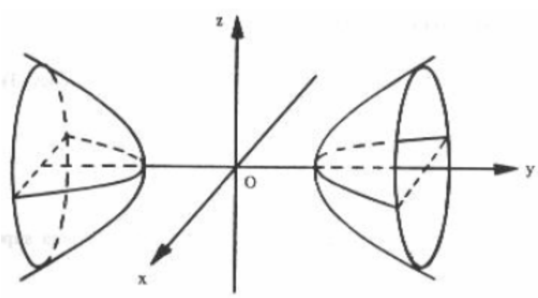
Centro C(0, 0, 0).
Um dos sinais é sempre negativo.

(1) + + - : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) + - + : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(3) - + + : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Hiperbolóide de duas folhas:



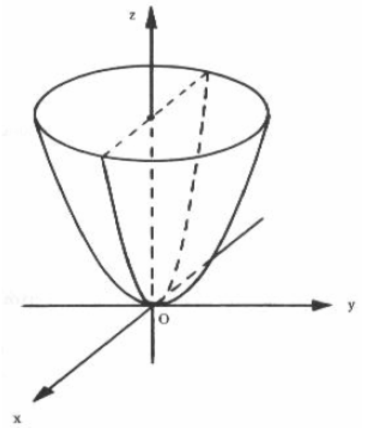
Centro C(0, 0, 0).
Dois sinais são sempre negativos.

(1) + - - : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) - + - : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(3) - - + : $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Parabolóide Elíptico:



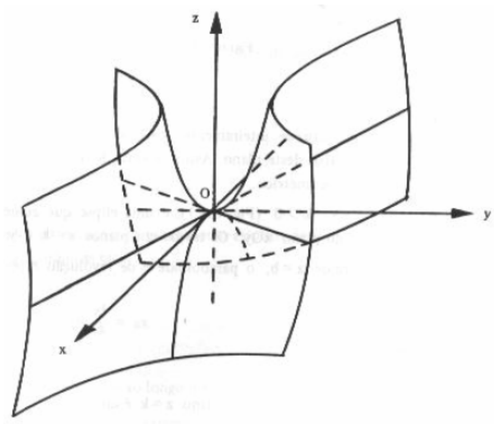
Os sinais são iguais.
ax, by, cz

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$

(3) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$

Parabolóide Hiperbólico (Sela):



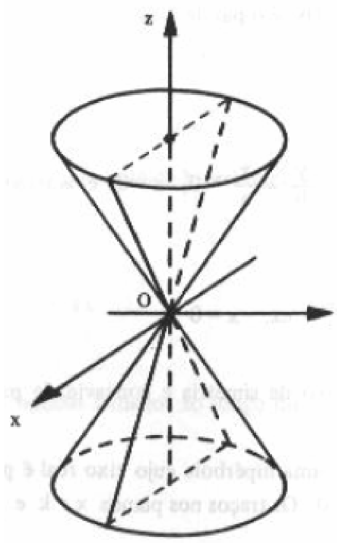
Os sinais são contrários.

(1) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=cz$

(2) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=by$

(3) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=ax$

Superfície Cônica:



Equações semelhantes às do Elipsóide porem igualadas à zero.

O termo de sinal negativo indica o eixo dos cones.

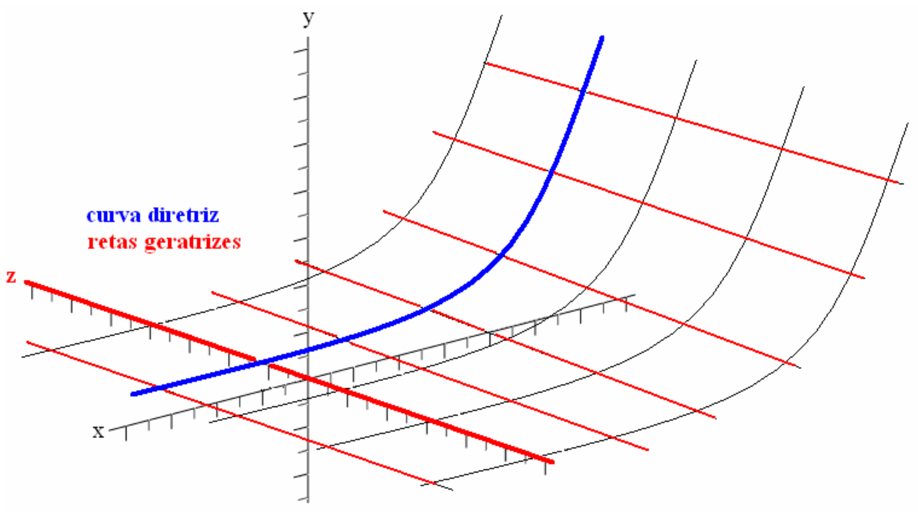
(1) eixo z (fig. ao lado): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

z=0 , a = b, obtém-se uma **superfície cônica circular**. Mas se a ≠ b então obtém-se uma **superfície cônica elíptica**. O mesmo se aplica nas demais equações.

(2) eixo x: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

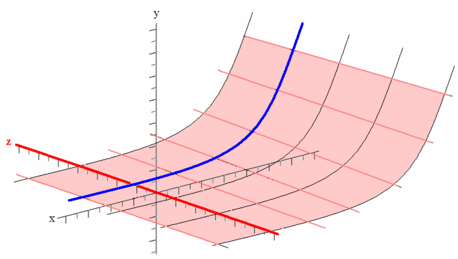
(3) eixo y: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

Superfície Cilíndrica:



O gráfico se auto explica, mas faremos algumas considerações

Imagine que você tenha uma **equação** de uma curva, então ela pode ser: uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, *mas não limitando-se apenas à estas curvas*.
Esta **equação** é chamada de diretriz, porque realmente dará uma direção ao plano.

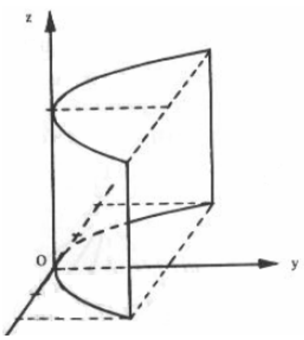


Imagine que as retas vermelhas estão avançando na direção (tanto faz o sentido) da curva azul, então elas estão gerando o plano, por isso são as geratrizes.

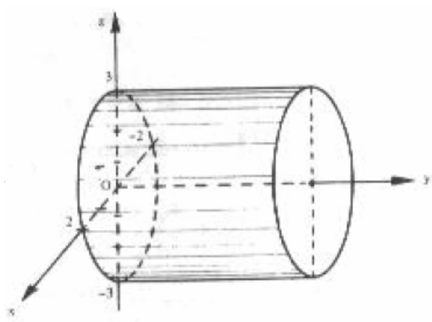
Se as retas se movessem muito rápido na direção da diretriz, então viríamos apenas o seu rastro formando um plano (figura ao lado).

Exemplos:

$x^2 = 2y$



$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$



Superfícies degeneradas: Ainda existem casos onde os gráficos podem representar quádricas degeneradas, exemplos:

a) $x^2 - 16 = 0$; dois planos paralelos: $x = 4$ e $x = -4$
b) $3y^2 = 0$; um plano: o plano $y = 0$
c) $x^2 + 2y^2 = 0$; uma reta: o eixo dos z.
d) $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$; um ponto: a origem (0,0,0)
e) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = -3$; o conjunto vazio.

(Exemplos do livro, pg;289, Observação.)

Livro, pg. 289, 8.6 Problemas Propostos, exercício 01.
Identificar as quádricas representadas pelas equações:

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

Solução:

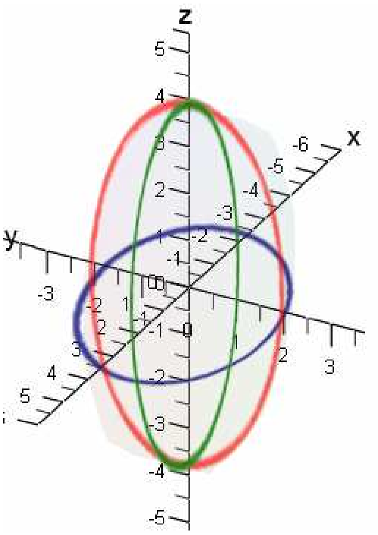
$$\frac{2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

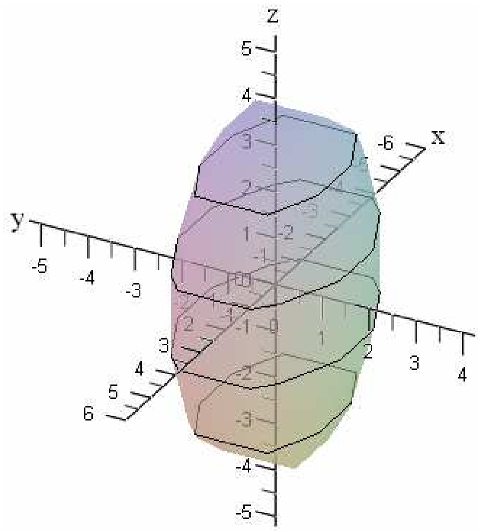
$x = 0$, $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$
elipse: $a = \pm 4$, $b = \pm 2$.

$y = 0$, $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{z^2}{16} = 1$
elipse: $a = \pm 4$, $b = \pm\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

$z = 0$, $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
elipse: $a = \pm\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$, $b = \pm 2$

Os gráficos serão gerados por computador, e os esboços ficarão por conta do estudante.





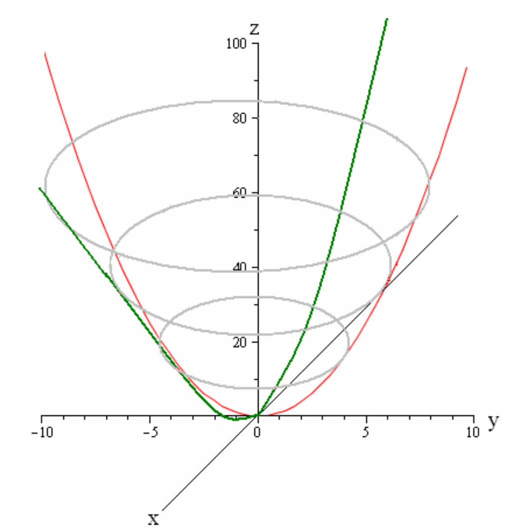
Elipsóide

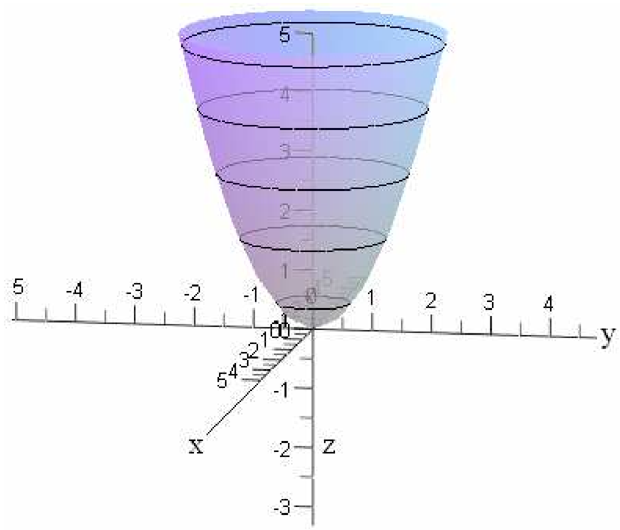
i) $z = x^2 + y^2$

Solução:
$x=0$, $\mathbf{z = y^2}$
Essa equação identifica uma parábola que intercepta o eixo z e percorre o eixo y

$y=0$, $\mathbf{x^2=z}$
Essa equação identifica uma parábola que intercepta o eixo z e percorre o eixo x

$\mathbf{z = x^2 + y^2}$
Essa equação identifica uma circunferência, no centro do sistema xyz
$z=0$, $x^2+y^2=0$ (raio = 0, não existe circunferência)
$z=4$, $x^2+y^2=4$ (raio = 2, existe circunferência)
e a medida que aumentamos **z**, o raio também aumenta (proporcionalmente), e o parabolóide vai crescendo infinitamente!





Parabolóide circular.

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

Solução:

Apenas manipulando a equação, dividindo tudo por 4 e isolando x.

$$\frac{4y^2 + z^2 - 4x = 0}{4} \quad \Rightarrow \quad y^2 + \frac{z^2}{4} = x$$

Essa última equação, identifica uma elipse que varia no eixo x.
Vemos que o **eixo maior (2a)** está em z, e o **eixo menor (2b)** em y.
Dando valores para x, fica mais fácil de desenhar:
x = 0 , não existe elipse!

x = 1 , $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

eixo maior em z, $a^2=4$, $b^2=1$

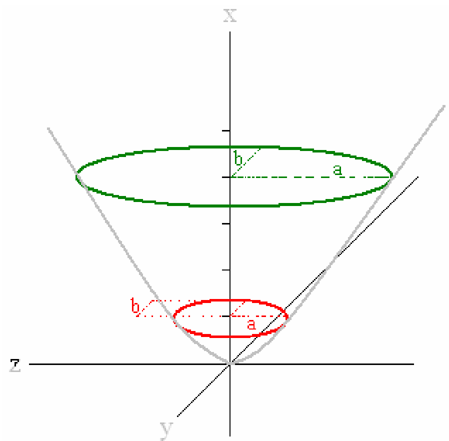
logo $a = \pm 2$, $b = \pm 1$

x = 4 , $y^2 + \frac{z^2}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

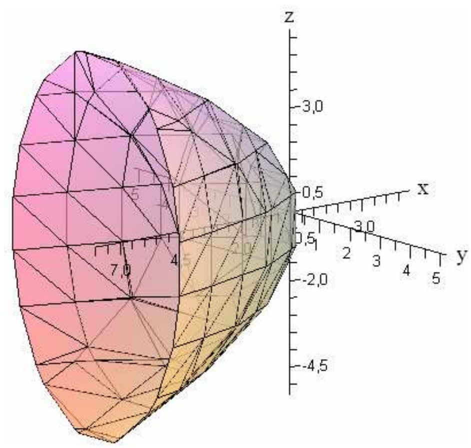
eixo maior em z, $a^2=16$, $b^2=4$

logo $a = \pm 4$, $b = \pm 2$

Veja que se zerarmos y e depois z , temos as parábolas de equações: $z^2 = 4x$ e $y^2 = x$.
A parábola cinza do gráfico tem equação: $z^2 = 4x$



Veja que a elipse aumenta conforme percorre o eixo x.



O software mudou o ângulo, mas os eixos onde a elipse varia, são os mesmos!

Parabolóide elíptico.

Prova de exame, exercício 5 (Udesc 2009/2).
Identificar as quádricas definidas pelas equações e representar graficamente:

a) $-\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

b) $y=-x^2-3z^2+2$

Solução:

a) O processo é o mesmo veja (e você tem que dominar o conteúdo de hipérboles).

x = 0, $\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

Identifica uma hipérbole. No eixo z (±3), e em y (±2). Com esses pontos traçamos as assíntotas e depois a hipérbole.

y = 0, $-\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

Também identifica uma hipérbole no eixo z (±3), e em x (±2).

z = 0, aqui não existe curva.

Logo com as duas hipérboles já temos uma idéia do que se trata e podemos fazer o gráfico.

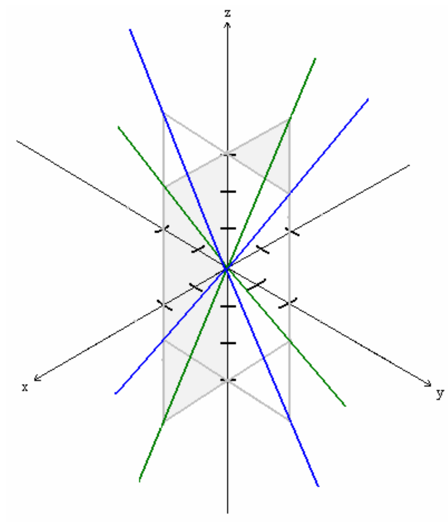
Na (fig. a) mostra-se as assíntotas.

Em azul estão as do plano y0z, quando x = 0.

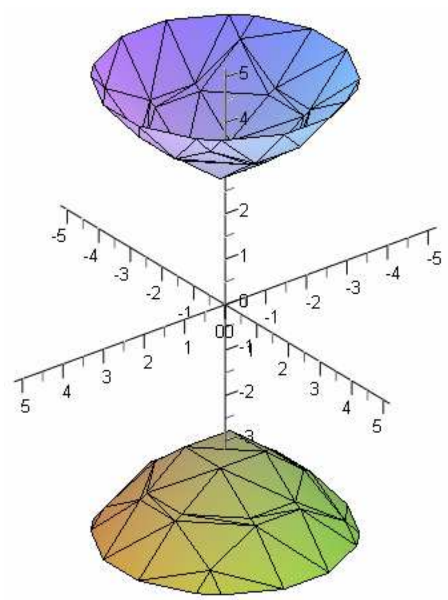
Em verde estão as do plano x0z, quando y = 0.

O significado das assíntotas nesse caso, é que o hiperbolóide (de duas folhas) vai se aproximando das retas, mas nunca o tocando (isso nos da uma idéia de como desenhar, por isso é útil).

Hiperbolóide de duas folhas.



(fig.a)



(fig.b)

b) $y = -x^2 - 3z^2 + 2$

Solução:

Um pouco confuso, mas manipulando chegamos a uma visualização melhor da equação:

$$y - 2 = -x^2 - 3z^2$$
$$x^2 + 3z^2 = 2 - y$$

Agora dividindo por dois, isso por que quando fazemos y = 0, temos a equação igualada a um, e isso nos da uma elipse que varia no eixo y:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3z^2}{2} = \frac{2-y}{2}$$

$$ou: \ \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{3}{2}} = \frac{2-y}{2}$$

Então quando y = 0 , $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{3}{2}} = 1$

Isso identifica uma elipse com eixo maior em x, e eixo menor em y.

Voltando a equação dada temos:
$y = -x^2 - 3z^2 + 2$

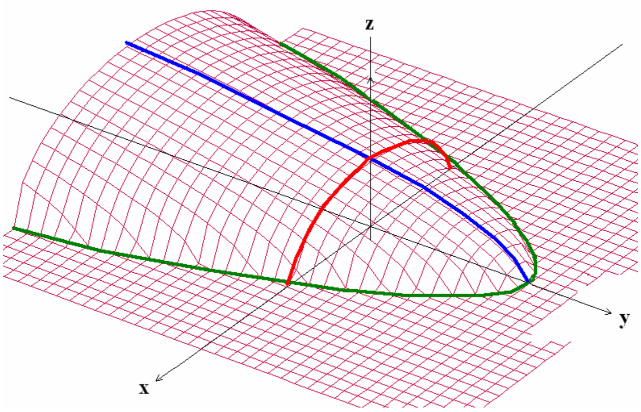
E quando fazemos z = 0
$y = -x^2 + 2$
Isso identifica uma **parábola no eixo 0y (em relação à x)** com concavidade negativa.

E quando x = 0
$y = -3z^2 + 2$
temos uma **parábola também no eixo 0y (mas em relação à z),** com concavidade negativa.

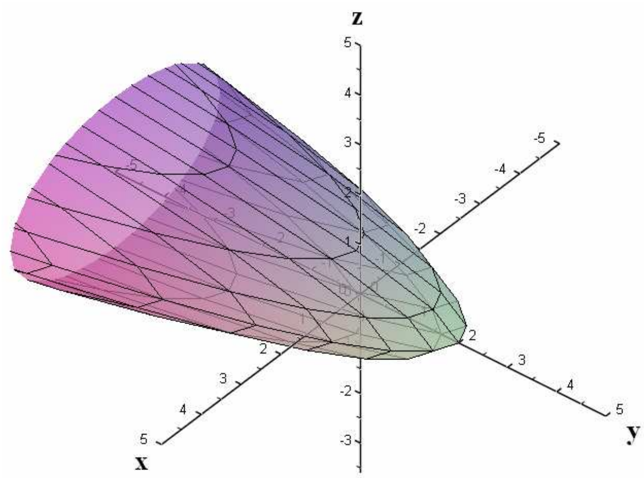
Logo, duas parábolas negativas e uma elipse que varia no eixo y.

Parabolóide elíptico.

Podemos ver as parábolas e a elipse, siga as cores. Neste gráfico somente uma parte das curvas foram feitas.



Neste gráfico podemos ver bem a elipse (como se fosse a boca do gráfico) que define o parabolóide elíptico.



Prova, exercício 4 (4,0 pts.) (Udesc 2009/2).
Identificar as seguintes superfícies e representar graficamente:

As análises ficam por conta do estudante, veja os gráficos e exercite!

a) $z = -x^2 - 2y^2 + 1$

b) $-\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 + \frac{y^2}{4}$

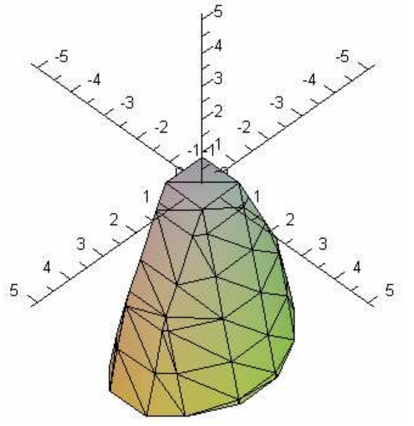
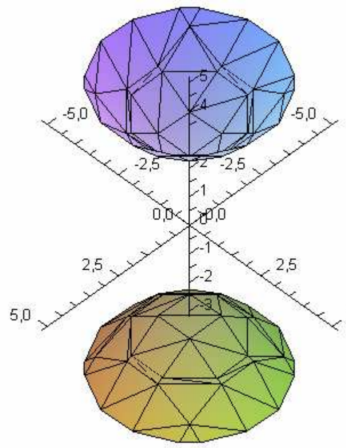
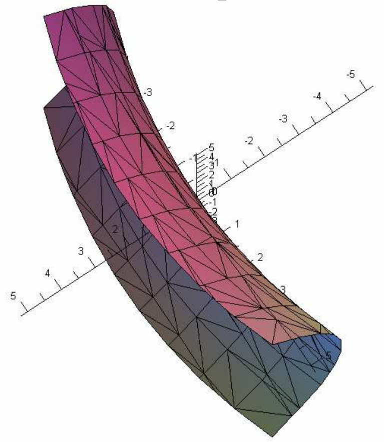
c) $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3x$

d) $z - y^2 = 1$

e) $x^2 + z^2 - 2z = 0$

f) $36x^2 - 72x + 4y^2 + 9z^2 = 36$

Solução:

a) Parabolóide elíptico	***b)Hiperbolóide de duas folhas***	***c) Parabolóide Hiperbólico***
		

d) Superfície Cilíndrica Parabólica.	***e) Superfície cilíndrica circular.***	***f) Elipsóide.***