MAT146 - Cálculo I - Integração por Frações Parciais

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Iremos agora desenvolver um método para resolver integrais de funções racionais, que é conhecido como método de integração por frações parciais.

Dada uma função racional $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, estudaremos uma técnica para resolver integrais de funções racionais cujo denominador se decompõe como produto de fatores lineares e fatores quadráticos irredtíveis.

Estamos interessados no estudo das funções racionais quando o grau de $g(x)$ é menor que o grau de $h(x)$. O motivo pode ser exemplificado da seguinte forma. Considere a função

$$f(x) = \frac{5x^5 + 10x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Neste caso podemos efetuar a divisão polinomial normalmente e obtemos:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} + 5x^2 + 1.$$

Logo, se quisermos integrar

$$\int \left(\frac{5x^5 + 10x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} \right) dx,$$

basta integrar

$$\int \left(\frac{3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} + 5x^2 + 1 \right) dx = \int \frac{3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} dx + \int (5x^2 + 1) dx.$$

Desta forma, voltamos ao caso em que queremos integrar uma função racional, a saber

$$r(x) = \frac{3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2},$$

onde o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Para resolvermos integrais de forma geral deste tipo, precisamos escrever $r(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ como soma de frações parciais, ou seja, $r(x)$ expresso como uma soma de frações, cujos denominadores são fatores irredútiveis de $h(x)$.

Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando $h(x)$ como produto de fatores lineares e quadráticos, onde os fatores quadráticos não tem raízes reais (são irredutíveis).

Vamos dividir este método de integração em quatro casos.

1º Caso: Os fatores de $h(x)$ são todos lineares e nenhum é repetido.

Então, o polinômio $h(x)$ se decompõe da seguinte forma

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n),$$

onde não existem fatores idênticos.

Neste caso, escrevemos

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

onde A_1, ..., A_n são constantes a serem determinadas.

Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx.$$

A decomposição em frações parciais assume a forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+3)}.$$

Para encontrar os valores dos coeficientes A, B, e C, desenvolvemos a igualdade acima obtendo

$$\begin{aligned} x^2+4x+1 &= A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2+4x+3)+B(x^2+2x-3)+C(x^2-1) \\ &= (A+B+C)x^2+(4A+2B)x+(3A-3B-C). \end{aligned}$$

Igualando os coeficentes dos dois polinômios da igualdade acima, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } x^2: &\quad A+B+C=1 \\ \text{Coeficiente de } x^1: &\quad 4A+2B=4 \\ \text{Coeficiente de } x^0: &\quad 3A-3B-C=1. \end{aligned}$$

Resolvendo, temos

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C = -\frac{1}{4}.$$

Para resolver este sistema, podemos usar várias técnicas, por exemplo, escalonamentos, isolando variáveis e substituir esta variável em outra equação do sistema ou substituição numérica.

Por exemplo, substituindo $x = 1$ em ambos os lados da igualdade, achamos o valor de A, da seguinte forma:

$$6 = 8A + 0B + 0C, \quad \text{ou seja} \quad A = \frac{3}{4}.$$

Substituindo $x = -1$ e $x = -3$ encontraremos de forma análoga os valores de B e C.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx &= \int \frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}dx \\
&\quad + \int -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)}dx \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}dx \\
&\quad -\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+3)}dx \\
&= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C
\end{aligned}$$

Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx.$$

Solução: Primeiramente, observe que o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Assim, precisamos efetuar primeiro a divisão entre os polinômios e encontrar o quociente e o resto da divisão.
Fazendo a divisão, obtemos

$$2x^3 - 4x^2 - x - 3 = (2x)(x^2 - 2x - 3) + 5x - 3.$$

■

Logo,

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx &= \int \left(2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right) dx \\ &= x^2 + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx. \end{aligned}$$

Precisamos então, calcular

$$\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)} dx.$$

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1).$$

Daí, concluimos que

$$A = 2 \quad \text{e} \quad B = 3.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx &= x^2 + \int \frac{2}{(x+1)}dx + \int \frac{3}{(x-3)}dx \\
&= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.
\end{aligned}$$

$2^{\underline{o}}$ Caso: Os fatores de $h(x)$ são todos lineares e alguns são repetidos

Suponha que $a_i x + b_i$ seja um fator que repita p vezes. Então, correspondente a este fator, temos uma soma de p frações parciais, da seguinte forma

$$\frac{A_1}{(a_i x + b_i)} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^2} + \frac{A_3}{(a_i x + b_i)^3} + \ldots + \frac{A_p}{(a_i x + b_i)^p}.$$

Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3}\,dx.$$

Solução: Escrevemos

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}.$$

■

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima pelo mínimo múltiplo comum, temos

$$x^3 - 1 = A(x(x-2)^3) + B(x-2)^3 + C(x^2(x-2)^2) + D(x^2(x-2)) + Ex^2.$$

Substituindo $x = 0$ na igualdade acima obtemos

$$-1 = -8B, \quad \text{ou seja,} \quad B = \frac{1}{8}.$$

Substituindo $x = 2$ na igualdade acima obtemos

$$7 = 4E, \quad \text{ou seja,} \quad E = \frac{7}{4}.$$

Falta agora encontrar os valores de A, C e D. Neste caso, devemos desenvolver a igualdade acima, agrupar os coeficientes e montar o sistema, usando igualdade de polinômios.

Obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
x^3 - 1 &= Ax(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\
&\quad + C(x^2(x^2 - 4x + 4)) + \frac{7}{4}x^2 + Dx^3 - 2Dx^2 \\
&= (A + C)x^4 + (\frac{1}{8} - 6A + D - 4C)x^3 \\
&\quad + (-\frac{3}{4} + 12A + \frac{7}{4} - 2D + 4C)x^2 + (\frac{3}{2} - 8A)x - 1.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência de x, obtemos

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \dfrac{1}{8} - 6A + D - 4C = 1 \\ -\dfrac{3}{4} + 12A + \dfrac{7}{4} - 2D + 4C = 0 \\ \dfrac{3}{2} - 8A = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos

$$A = \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{16} \text{ e } \quad D = \frac{5}{4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx &= \frac{3}{16}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2}dx - \frac{3}{16}\int \frac{1}{(x-2)}dx \\ &\quad + \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x-2)^2}dx + \frac{7}{4}\int \frac{1}{(x-2)^3}dx \\ &= \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{1}{8x} - \frac{3}{16}\ln|x-2| - \frac{5}{4(x-2)} \\ &\quad + \frac{7}{8(x-2)^2} + C.\end{aligned}$$

3º Caso: Os fatores de $h(x)$ são lineares e quadráticos e nenhum fator quadrático é repetido

Correspondente ao fator $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Observação

Lembre-se que o fator $ax^2 + bx + c$ é irredutível, se ele não possuir raízes reais, ou seja,

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx.$$

O denominador tem um fator quadrático irredutível, bem como um fator linear repetido. Então, escrevemos

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

Ao eliminarmos a equação de frações , obtemos

$$\begin{aligned} -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + \\ &= (A-2B+C)x + (B-C+D) \end{aligned}$$

Ao igualarmos os coeficientes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\text{Coeficientes de } x^3: &\quad 0 = A + C \\
\text{Coeficientes de } x^2: &\quad 0 = -2A + B - C + D \\
\text{Coeficientes de } x^1: &\quad -2 = A - 2B + C \\
\text{Coeficientes de } x^0: &\quad 4 = B - C + D.
\end{aligned}
$$

Resolvendo, obtemos

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = -2 \quad \text{e} \quad D = 1.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{2x+1}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{-2}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\
&= 2\int \frac{x}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx \\
&\quad -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \\
&= \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.
\end{aligned}$$

4º Caso: Os fatores de $h(x)$ são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $h(x) = ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático irredutível que se repete p vezes, então, correspondente ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos p frações parciais.

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}.$$

Exemplo

Se o denominador contém o fator $(x^2+3x+5)^3$, *correspondente a este fator teremos*

$$\frac{Ax+B}{(x^2+3x+5)}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+3x+5)^3}.$$

Exemplo

Calcule $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx.$

Solução: A decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

■

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $x(x^2+1)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
1 - x + 2x^2 - x^3 &= A((x^2+1)^2) + (Bx+C)(x)(x^2+1) + (Dx+E)(x) \\
&= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos polinômios, obtemos

$$\begin{cases}
A+B=0 \\
C=-1 \\
2A+B+D=2 \\
C+E=-1 \\
A=1
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad D = 1 \quad \text{e} \quad E = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x+1}{(x^2+1)} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)} dx - \int \frac{1}{(x^2+1)} dx \\
&\quad + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$