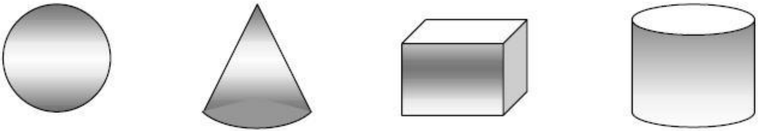
Aplicação de Integral Definida:

Volumes de Sólidos de Revolução

Prof^a. Ariane Piovezan Entringer

Sólidos

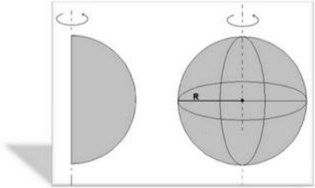
Exemplos de Sólidos: esfera, cone circular reto, cubo, cilindro.



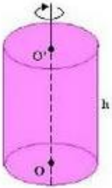
Sólidos de Revolução são sólidos gerados a partir da rotação de uma área plana em torno de um eixo do seu plano, chamado *eixo de revolução*.

Sólidos de Revolução

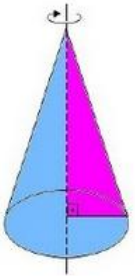
Por exemplo:
A **esfera** é obtida pela rotação do semicirculo em torno de seu diâmetro:



O **cilindro** é obtido pela rotação de um retângulo em torno da reta que passa por um de seus lados.

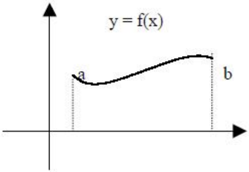


O **cone** é obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos:

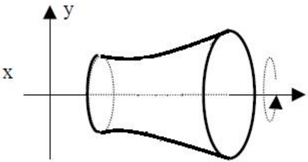


Sólidos de Revolução

Considere a função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é:

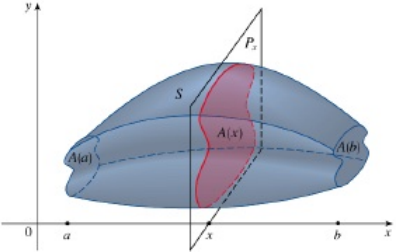


Considere a região plana limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x, e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Girando o gráfico de f em torno do exio x, temos o seguinte sólido de revolução.



Volume por fatiamento

Seção Transversal por x é a região plana formada pela interseção entre o sólido S e um plano P_x, perpendicular ao eixo x.

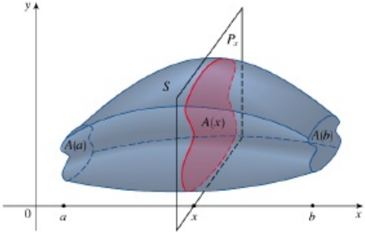


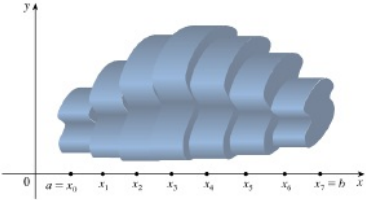
Vamos determinar como calcular o volume de um sólido S como este acima.
Para isto estendemos a definição de cilindro dada pela geometria clássica para sólidos cilindricos com bases arbitrárias.

Volume de um sólido cilindrico: $V = A_b \cdot h$.

Se a seção transversal do sólido S em cada ponto x em $[a, b]$ é uma região R_x de área $A(x)$, e A é uma função contínua de x, podemos definir e calcular o volume do sólido S como uma integral definida, da seguinte forma:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos do tipo $[x_{k-1}, x_k]$ de comprimento Δx_k, e fatiamos o sólido por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- Os planos P_{x_k}, perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição, dividem o sólido S em fatias finas (como um pão de forma).
- Aproximamos a fatia situada entre o plano em x_{k-1} e o plano x_k usando um sólido cilindrico com área da base $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.





- O volume V_k do sólido cilindrico é $V_k = A(x_k)\Delta x_k$.
- A soma dos volumes V_k é então dada por:

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k,$$

que é uma soma de Riemann para a função $A(x)$ em $[a, b]$.

- Fazendo o limite com $|P| \to 0$ (norma da partição P) - que é equivalente a fazer $n \to \infty$, temos:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx.$$

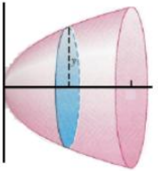
Definição

O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da seção transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Sólidos de Revolução - Volume por discos

Para determinar o volume de um sólido de revolução como este



precisamos apenas observar que a seção transversal é um disco, cujo raio é $R(x)$ (a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução).
A área é, portanto

$$A(x) = \pi[R(x)]^2.$$

Assim,

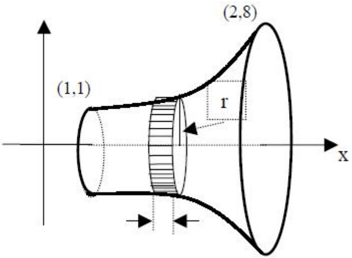
$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx.$$

Se o eixo de rotação for o eixo x, então

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Exemplos

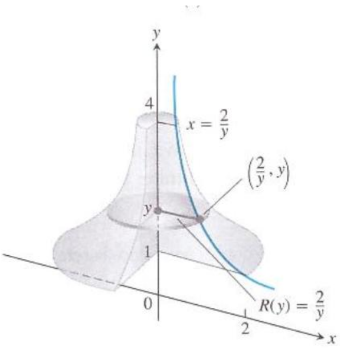
1. Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob o gráfico da função $f(x) = x^3$, no intervalo $[1, 2]$.



2. Obtenha a fórmula para o volume de uma esfera de raio r.

Revolução em torno do eixo y

Para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, de uma região compreendida entre o eixo y e uma curva $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, usamos o mesmo método, substituindo x por y. Neste caso, $x = g(y)$.



$$R(y) = x = g(y)$$

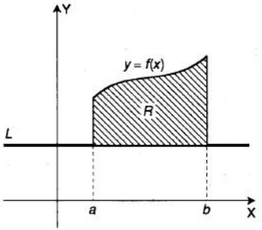
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2\, dy.$$

Exemplo

Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y, no intervalo $[0, 4]$.

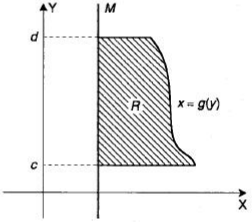
Revolução em torno de retas paralelas aos eixos

Eixo de rotação paralelo ao eixo x



$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 \, dx.$$

Eixo de rotação paralelo ao eixo y



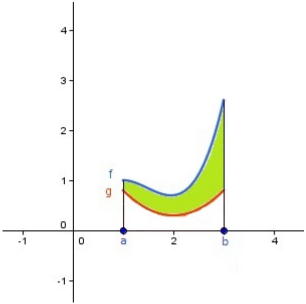
$$V = \pi \int_a^b [R(y)]^2 \, dy = \pi \int_a^b [g(y) - M]^2 \, dy.$$

Exemplos

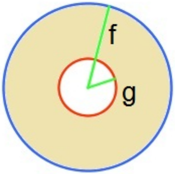
1. Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $x = 3$, da região compreendida entre a parábola $x = y^2 + 1$ e a reta $x = 3$.
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da área limitada pela parábola $y^2 = 8x$ e pela reta $x = 2$, nos seguintes casos:
   a) rotação em torno do eixo x,
   b) rotação em torno do eixo y,
   c) rotação em torno da reta $x = 2$.

O Método de Arruelas

Em casos mais gerais, a região rotacionada não é limitada inferiormente pelo eixo x, mas sim por outra função não negativa $g(x)$, conforme figura abaixo.



Nesses casos, a região das seções transversais não são circunferências, mas sim arruelas, ou seja, "circunferências com um furo no meio", conforme figura abaixo.



Então, a área da seção transversal será dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)$$

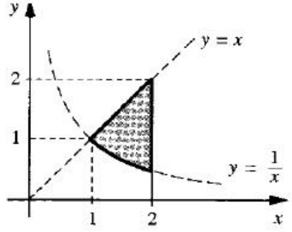
(pense em descontar a área do círculo menor da área do círculo maior!) e, portanto, teremos uma nova fórmula para o volume.

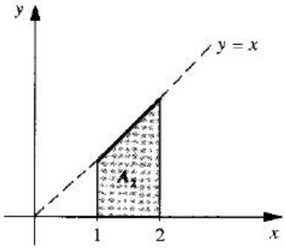
Assim, o volume é dado por

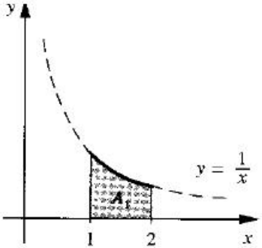
$$V = \int_a^b \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx.$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $\frac{1}{x} \leq y \leq x$, $1 \leq x \leq 2$.


y
y = x
2
1
y = 1/x
1
2
x


y
y = x
A₂
1
2
x


y
y = 1/x
A₁
1
2
x