Universidade Federal de Viçosa

Departamento de Matemática

MAT 140 (Cálculo I) - 2017/II

Exercícios Resolvidos e Comentados (Parte 2)

1) **Limites:** Calcule os seguintes limites abaixo se existirem. Caso contrário, justifique a não existência.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2}$

Resolução: Note que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2} \to \dfrac{0}{0}$ .Temos, portanto, que remover esta indeterminação a fim de encontrar o limite, caso ele exista. O procedimento mais comum quando se trata de limites envolvendo raízes é a chamada racionalização, onde multiplica-se a função cujo limite queremos determinar por um fator adequado que elimina a indeterminação. Por exemplo

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x-4} \times (\sqrt{x}+2) = \lim_{x\to 4} (\sqrt{x}+2) = 4$$

Mas este processo torna-se complicado quando temos raízes de ordens superiores a 2, pois identificar o fator que deve-se multiplicar a função a fim de remover a indeterminação não é mais imediato. Tomaremos, então, uma abordagem diferente primeiramente eliminando os radicais. Como temos termos do tipo $\sqrt[2]{x}$,$\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt[5]{x}$, vemos que uma substituiçao do tipo $x = u^{30}$ eliminará todos os radicais, pois 30 é o mínimo múltiplo comum de $2, 3$ e 5 e sabemos que $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Note que $x \to 1 \Rightarrow u \to 1$, portanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{u\to 1} \frac{\sqrt{u^{30}}+\sqrt[3]{u^{30}}-2}{\sqrt[5]{u^{30}}+\sqrt[3]{u^{30}}-2} = \lim_{u\to 1} \frac{u^{15}+u^{10}-2}{u^6+u^{10}-2}$$

A indeterminação ainda persiste, mas agora temos outra técnica disponível, pois o fato de que $u^{15}+u^{10}-2 = 0$ e $u^6+u^{10}-2 = 0$ quando $u = 1$, nos sugere que esses polinômios podem ser escritos como $u^{15}+u^{10}-2 = (u-1)(\dots)$ e $u^6+u^{10}-2 = (u-1)(...)$, ou seja, após serem escritos dessa forma, os termos responsáveis pela indeterminação estarão explícitos tanto no numerador quando no denominador e serão cancelados, permitindo calcular o limite através dos termos restantes, mas primeiro devemos determiná-los. Para tanto, basta efetuarmos a divisão dos polinômios $\dfrac{u^{15}+u^{10}-2}{u-1}$ e $\dfrac{u^{10}+u^6-2}{u-1}$. Após efetuarmos a divisão (pelo método de Briot-Ruffini, por exemplo) obtemos:

$$\frac{u^{15}+u^{10}-2}{u-1} = (1+u+u^2+u^3+u^4)(2+2u^5+u^{10})$$
$$\frac{u^{10}+u^6-2}{u-1} = (1+u)(2+2u^2+2u^4+u^6+u^8)$$

Onde já simplificamos os polinômios. Agora estamos aptos a calcular o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{u\to 1} \frac{u^{15}+u^{10}-2}{u^6+u^{10}-2} = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(1+u+u^2+u^3+u^4)(2+2u^5+u^{10})}{(u-1)(1+u)(2+2u^2+2u^4+u^6+u^8)} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(1+u+u^2+u^3+u^4)(2+2u^5+u^{10})}{(1+u)(2+2u^2+2u^4+u^6+u^8)} = \frac{25}{16}\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{cx^2+ax}-\sqrt{cx^2+bx}\right)$

Resolução: Quando se trata de limites com $x \to \pm\infty$, a tática é deixar a função cujo limite queremos calcular em função de termos apenas de constantes e/ou $\left(\dfrac{constante}{x^n}\right)$ com $n > 0$, pois estes últimos tendem a zero quando $x \to \pm\infty$ sobrando apenas as constantes, caso o limite exista. Para fazer isto, basta colocar o termo de maior grau em evidência. Vejamos isto na prática, mas antes precisaremos fazer uma pequena modificação :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{cx^2+ax}-\sqrt{cx^2+bx}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{cx^2+ax}-\sqrt{cx^2+bx}\right)\times\frac{\sqrt{cx^2+ax}+\sqrt{cx^2+bx}}{\sqrt{cx^2+ax}+\sqrt{cx^2+bx}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{cx^2+ax-cx^2-bx}{\sqrt{cx^2+ax}+\sqrt{cx^2+bx}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{cx^2+ax}+\sqrt{cx^2+bx}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2\left(c+\frac{a}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(c+\frac{b}{x}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x}{|x|\sqrt{\left(c+\frac{a}{x}\right)}+|x|\sqrt{\left(c+\frac{b}{x}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}\frac{(a-b)}{\sqrt{\left(c+\frac{a}{x}\right)}+\sqrt{\left(c+\frac{b}{x}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(-x)}\frac{(a-b)}{\sqrt{\left(c+\frac{a}{x}\right)}+\sqrt{\left(c+\frac{b}{x}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(b-a)}{\sqrt{\left(c+\frac{a}{x}\right)}+\sqrt{\left(c+\frac{b}{x}\right)}} = \frac{b-a}{2\sqrt{c}}
\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$

Resolução: Este limite assemelha-se ao limite fundamental $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. A ideia é que possamos reescrever o limite com essa mesma forma para podermos fazer uso desse resultado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-4x+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right]^{\frac{x^2-1}{x}}
\end{aligned}$$

Por fim, precisamos que o mesma função que aparece entre parênteses no denominador apareça no expoente da função. Podemos fazer isso inserindo-a no expoente, contanto que multipliquemos pela inversa para que não mudemos a função. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right]^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right]^{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)\left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\frac{x^2-1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right]^{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right\}^{\left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\frac{x^2-1}{x}}
\end{aligned}$$

Entre as chaves, temos o limite da forma que queremos, mas antes de usar o limite fundamental devemos checar se o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x}{3-4x}$ tende pra ∞ assim como no limite fundamental. De fato:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x}{3-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} \frac{(1+\frac{4}{x})}{(\frac{3}{x}-4)} = \lim_{x\to\infty} x\frac{(1+\frac{4}{x})}{(\frac{3}{x}-4)} = \infty$$

Portanto, podemos fazer a mudança de variáveis $u = \frac{x^2+4x}{3-4x}$ para o limite entre chaves e aplicar o limite fundamental, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} &= \left\{\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right]^{\left(\frac{x^2+4x}{3-4x}\right)}\right\}^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\frac{x^2-1}{x}} \\
&= \left\{\lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right\}^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}
\end{aligned}$$

Vejamos agora o limite no expoente:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3-4x}{x^2+4x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{3}{x}-4\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)} \frac{x^2}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{x}-4\right)}{\left(1+\frac{4}{x}\right)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -4$$

Logo

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} = e^{-4}$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2}$

Resolução: Limites contendo funções trigonométricas e potências de x sugerem recorrer ao limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ como uma primeira tentativa. O desafio está em fazer aparecer o limite fundamental no limite que queremos determinar.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \cos x \left(\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \cos x \left(\frac{\sin^2 x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Onde usamos a relação $cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ter um domínio sobre relações trigonométricas é de extrema utilidade quando se trata de limites envolvendo tais funções.

2) **Continuidade:** Estude a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & ,x \le 1 \\ \frac{x^2}{a} & ,x > 1 \end{cases}$$

Resolução: Polinômios de x são contínuos para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função acima é contínua para todo $x > 1$ ou $x < 1$. Temos que checar o ponto $x = 1$, pois os limites laterais podem ser diferentes, visto que as funções são diferentes caso o limite seja pela direita ou pela esquerda. De fato:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{a} = \frac{1}{a}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x + a = 2 + a$$

Logo, a função f será contínua também em $x = 1$ se, e só se:

$$2 + a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 + 2a = 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 2 \Rightarrow (a+1)^2 = 2$$
$$\Rightarrow a + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}$$

Portanto, $f(x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, se $a = -1 \pm \sqrt{2}$ e será contínua em $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, caso contrário.

3) **TVI:** Se g é contínua, $g(1) = g(3) = -10$ e $g(2) = 10$, então g possui exatamente 2 raízes em $[1, 3]$?

Resolução: Sendo g uma função contínua, em particular, então ela o é nos intervalos $[1, 2]$ e $[2, 3]$. Sendo $g(1)g(2) < 0$ e $g(2)g(3) < 0$, o *teorema do valor intermediário* (TVI) nos garante que existe *pelo menos um* $c_1 \in (1, 2)$ e outro $c_2 \in (2, 3)$ tais que $g(c_1) = g(c_2) = 0$, ou seja, o teorema nos garante apenas que existem *pelo menos* duas raízes no intervalo $[1, 3]$, podendo, portanto, haver mais de duas raízes. De fato, na figura abaixo temos um exemplo disso:

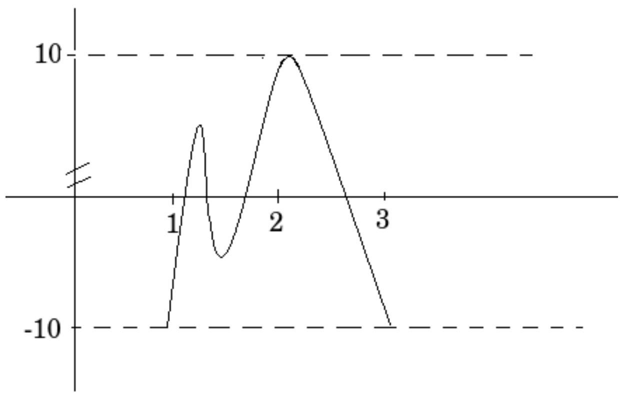

Figura 1: Gráfico

Logo,a resposta é não e a justificativa é o contra exemplo acima, onde temos três raízes. Naturalmente, poder-se-ia construir exemplos com mais do que três raízes, mas nunca menos que duas, devido ao TVI.

4) Pode ser aplicado o TVI à função $h(x) = \dfrac{5[f(x)]^3}{x^2+1}$ sabendo que f é contínua em $\mathbb{R}$?

Resolução: Considere as funções $p(x) = x^3$ e $g(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$. Sendo f também contínua, a composição $p(f(x)) = [f(x)]^3$ é também uma função contínua e, dado que o produto de duas funções contínuas também é contínuo, então a função $h(x) = p(f(x))g(x) = \dfrac{5[f(x)]^3}{x^2+1}$ é contínua, portanto o TVI pode ser aplicado a ela.

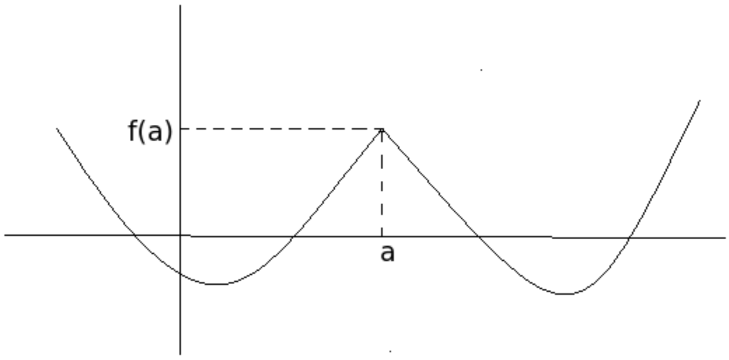

Figura 2: Questão 5)

5) **Derivadas** Considere o gráfico de f acima.
Existe $f'(a)$?

Resolução: Por definição[1], $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e para o limite existir ele deve ser único, ou seja, os limites laterais devem coincidir. Mas, inspecionando o gráfico, podemos ver que $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, pois $x \to a^+ \Rightarrow x > a \Rightarrow x - a > 0$ e que, com $x \to a^+$, $f(x) < f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) < 0$, o que justifica o sinal do limite; analogamente $\lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Uma vez que os limites laterais não coincidem, o limite, e portanto a derivada $f'(a)$, não existe.

6) Ordene em forma "crescente"os $f'(x_i), i = 1, 2, ..., 6$

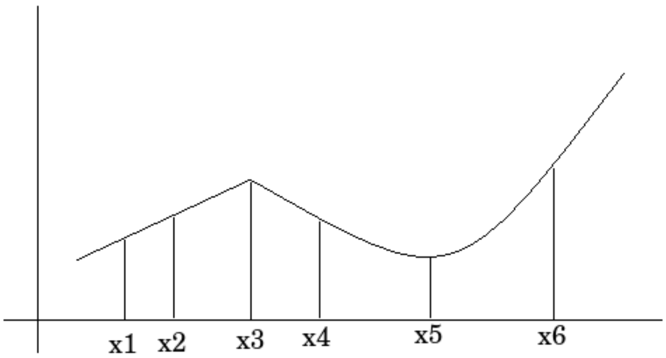

Figura 3: Questão 6)

Resolução: Aqui, precisaremos da interpretação geométrica da derivada como *inclinação da reta tangente ao ponto.* De fato, dados dos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, a inclinação da reta que passa pelos dois é $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Tomando o limite com $x_2 \to x_1$, temos a definição de derivada no ponto x_1. Primeiramente, notemos que, pelos mesmos motivos explicados na resolução da questão 5), não existe a derivada $f'(x_3)$. Para as derivadas restantes, analisemos as retas tangentes em cada ponto exibidas na figura a seguir:

[1]Talvez esteja mais familiarizado com a definição $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, mas ambas são equivalentes, bastando para tanto tomar $x = a + h$. A definição utilizada foi escolhida por ser mais adequada e intuitiva para análise feita

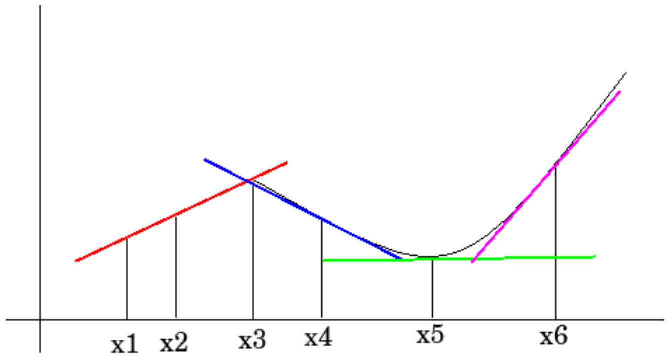

Figura 4: Gráfico

Pelo gráfico, podemos chegar às seguintes conclusões: $f'(x_2) = f'(x_1) > 0$, pois pertencem à mesma reta e esta resta possui inclinação positiva (crescente); $f'(x_4) < 0$, pois possui "inclinação negativa";$f'(x_5) = 0$, pois a reta tangente é horizontal e, por fim, $f'(x_6) > f'(x_1)$, pois a reta tangente é mais inclinada em x_6 do que em x_1. Portanto, a resposta é: $f'(x_4) < f'(x_5) < f'(x_1) = f'(x_2) < f'(x_6)$ e não existe $f'(x_3)$.