MAT146 - Cálculo I - Derivada da Função Exponencial e da Função Logarítmica

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Agora, iremos calcular a derivada da função exponencial. Iremos demonstrar que se $f(x) = a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$, então

$$f'(x) = a^x . \ln a.$$

Para isso, iremos assumir o seguinte limite, também conhecido como segundo limite fundamental

Teorema (Segundo Limite Fundamental)

$$\lim_{h \to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Consideremos agora a função $g(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right). \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

Fazendo $u=e^h-1$, temos

$$\frac{e^h-1}{h}=\frac{u}{\ln(1+u)}=\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Se $h\to 0$, então $u\to 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}\\ &= \frac{1}{\ln e}=1.\end{aligned}$$

Assim, se $g(x) = e^x$, então $g'(x) = e^x \lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$.

Teorema

Se $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Demonstração: Sabendo que

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a},$$

e se $h(x) = e^x$ e $g(x) = x \cdot \ln a$, então

$$f(x) = h \circ g(x).$$

Pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $h(x) = e^x$ e $g'(x) = \ln a$, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' \\ &= e^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' \\ &= e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a \\ &= a^x \cdot \ln a. \end{aligned}$$

■

Exemplo

Vamos calcular $f'(x)$, *para* $f(x) = 5^{x^2}$. *Se considerarmos* $h(x) = 5^x$ *e* $g(x) = x^2$, *então*

$$f(x) = (h \circ g)(x).$$

Assim,

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $h'(x) = 5^x \ln 5$ *e* $g'(x) = 2x$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= h'(x^2) \cdot 2x \\ &= 5^{x^2} \ln 5 \cdot 2x. \end{aligned}$$

Exemplo

Vamos calcular $f'(x)$, *para* $f(x) = 3^{\operatorname{sen} x}$. *Se considerarmos* $h(x) = 3^x$ *e* $g(x) = \operatorname{sen} x$, *então*

$$f(x) = (h \circ g)(x).$$

Assim,

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $h'(x) = 3^x \ln 3$ *e* $g'(x) = \cos x$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= h'(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\ &= 3^{\operatorname{sen} x} \ln 3 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Agora, iremos encontrar a derivada da função $f(x) = \log_a(x)$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Para isso, inicialmente iremos encontrar a derivada da função $g(x) = \ln x$, para $x > 0$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right). \end{aligned}$$

Agora, fazendo uma mudança de variável, seja $u = \frac{h}{x}$. Assim, se $h \to 0$, então $u \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{ux} \ln(1+u) \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} \\ &= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right) \\ &= \frac{1}{x} \ln e \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Teorema

Seja $a > 0$ *e* $a \neq 1$. *Se* $f(x) = \log_a(x)$, *para* $x > 0$, *então*

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Demonstração: Como $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \\ &= (\ln x)' \cdot \frac{1}{\ln a} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

■

Exemplo

Dado $f(x) = \log_{10} \frac{x^2+2}{x^2}$, *determine* $f'(x)$.

Se considerarmos $h(x) = \log_{10} x$ *e* $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2}$, *então*

$$f(x) = (h \circ g)(x).$$

Assim,

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como

$$h'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \quad e \quad g'(x) = \frac{(2x^3) - (2x^3 + 4x)}{(x^2)^2} = -\frac{4}{x^3}.$$

Então

$$\begin{aligned}
f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= h'\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{x^3}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)\ln 10} \cdot \left(-\frac{4}{x^3}\right) \\
&= -\frac{4x^2}{(\ln 10)(x^2+2)(x^3)} \\
&= -\frac{4}{(\ln 10)(x^3+2x)}.
\end{aligned}$$