

## **Ensino-Aprendizagem da Matemática: Velhos problemas, Novos desafios**

**CLÁUDIA CRISTINA VASCONCELOS \***

"Nunca nos tornaremos matemáticos, mesmo que a nossa memória domine todas as demonstrações feitas por outros, se o nosso espírito não for capaz de resolver todas as espécies de problemas".

(Descartes)

### **I - Introdução**

Os problemas que se levantam ao ensino da Matemática a todos os níveis não são novos. Tal como não é novo o mal estar que eles provocam em professores e alunos. No entanto, este mal estar parece aumentar e agudizar-se ultimamente. Os problemas são muitos, variados e difíceis. Seria sempre arriscado e pretencioso procurar abordá-los na sua totalidade, mas mais ainda num trabalho como este. Limitar-me-ei aqui a reflectir sobre alguns dos aspectos que normalmente surgem na aprendizagem e no ensino da Matemática.

Assim, numa altura em que já foram ensaiadas diversas mudanças no ensino da Matemática com vista a melhorar a sua aprendizagem, nomeadamente mudanças curriculares e programáticas, o problema do ensino da Matemática e da sua aprendizagem talvez possa ser abordado segundo outras perspectivas.

No ensino-aprendizagem da Matemática podemos falar de um triângulo (humano-programático) cujos vértices são: a Matemática, os alunos e o professor.

O papel a desempenhar pelo professor numa sala de aula é - posto de uma forma simplista - o de tornar o caminho entre a Matemática e os alunos o mais curto possível. Cabe ao professor, que admitimos encontrar-se já suficientemente perto de ambos, Matemática e alunos, a missão de conduzir a Matemática até aos alunos ou de levar os alunos até à Matemática.

Além disso, a conduta do professor parece ser, pelo menos numa primeira análise, aquela que está mais ao alcance dos professores de Matemática e, portanto, é aí que podemos começar por exercer as nossas influências com vista à aproximação desejada entre a Matemática e os alunos.

Sendo assim, parece ser sobre o papel e a atitude do professor de Matemática que devemos meditar em primeiro lugar questionando-nos sobre problemas que existem à nossa volta e que estejam relacionados, de uma forma ou de outra, com a Matemática e o seu ensino. Alguns desses problemas poderão não ter respostas claras ou simples, mas uma análise consciente feita pelo professor que pretende ensinar Matemática contribuirá, por certo, para um enriquecimento da sua actividade profissional. Uma vez consciente do seu papel, será mais

fácil pensar e actuar sobre os outros dois vértices do triângulo, isto é, sobre a Matemática e sobre os alunos.

Gostava muito de, no final deste trabalho, poder encetar a resposta à questão:

Porque é que fazemos o que fazemos na sala de aula?

Mas serei provavelmente incapaz, pois ela obriga-me a evocar essa mistura de vontades, de gostos, de sentidos atribuídos, de experiências, de acasos até, que foram consolidando crenças, concepções, gestos, rotinas, comportamentos com os quais nos identificamos como professores.

## **II - Breve reflexão sobre o conhecimento matemático**

A Matemática é uma grande aventura nas ideias; a sua história reflecte alguns dos mais nobres pensamentos de inúmeras gerações.

Nos últimos séculos o ensino em geral - e o ensino da Matemática em particular - sofreu muitas mudanças significativas. Pode basicamente dizer-se que a política outrora vigente, que consistia em seleccionar os estudantes a partir de uma minoria favorecida, deu lugar, pelo menos em teoria, a uma visão mais democrática de abrir as oportunidades educacionais a estudantes vindos dos mais diversos níveis da sociedade.

Infelizmente, as mudanças curriculares por si só nunca deram nem podem dar os resultados pretendidos. Como alguém disse:

A Matemática nova ensinada de modo antigo é Matemática velha.

A Matemática não é uma ciência cristalizada e imóvel; ela está afectada por uma contínua expansão e revisão dos seus próprios conceitos. Não se deve apresentar a Matemática como uma disciplina fechada, monolítica, abstracta ou desligada da realidade. Ao longo dos tempos, esteve ligada a diferentes áreas do conhecimento, respondendo a muitas questões e a necessidades do Homem, ajudando-o a intervir no mundo que o rodeava. Neste contexto, é oportuno realçar o pensamento de Bento de Jesus Caraça:

"A Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui os seus problemas próprios, que não têm ligação imediata com os problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham, tal como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam-se na mesma madre."

Pensa-se que existe um paralelismo entre o modo como o aluno aprende determinado assunto e a forma como o Homem interactuou com o mesmo, ao longo dos tempos.

Assim, acredita-se que dominando a componente histórica do conhecimento do Homem sobre determinado assunto e ao prever este processo no acto pedagógico a aprendizagem torna-se mais integradora e eficaz, dado que vai ao encontro do próprio envolvimento natural do conhecimento da humanidade, face à matéria específica.

A perspectiva histórica do conhecimento matemático também tem a ver com a própria cultura matemática.

As actividades interdisciplinares e transdisciplinares de cultura matemática são imensas. A tarefa principal do professor é saber sistematizar a informação recolhida, organizar os tempos e os espaços adequados, tendo sempre presente os interesses, as motivações, as dificuldades, as potencialidades intelectuais relacionadas com o grau etário dos alunos.

### **III - A Matemática, o mundo matemático e a natureza da Matemática**

A Matemática é, essencialmente, uma actividade criativa. A formulação e a resolução de problemas constituem os elementos fundamentais da actividade matemática - sem resolver e sem formular problemas não se faz Matemática - e é isso que lhe confere esse carácter criativo. Por outro lado, fruto do desenvolvimento interno e autónomo da Matemática ou suscitados por necessidades e exigências que lhe são exteriores, esses problemas, a sua formulação e resolução, constituem a contribuição mais importante da Matemática nas suas relações com as diversas ciências e outras actividades humanas. Além disso, ao nível do ensino da Matemática, considera-se que situações de carácter problemático favorecem a criação de ambientes de aprendizagem ricos e estimulantes.

Muito possivelmente, as regras e técnicas matemáticas, bem como os aspectos simbólicos da Matemática, terão de ser sempre contemplados, de uma forma ou de outra, no ensino dessa disciplina. Não são, no entanto, os únicos nem, certamente, os mais importantes. O desenvolvimento da tecnologia, em particular a existência dos computadores e das calculadoras, dão hoje mais razão e proporcionam mais e melhores meios para que a ênfase no ensino incida nos aspectos mais conceptuais da Matemática em detrimento dos seus aspectos mais mecânicos. Os conceitos, as formas de raciocínio e os vários tipos de actividade matemática devem ser assumidos, todos eles, como conteúdos de ensino em Matemática, constituindo mesmo o seu núcleo essencial. Em particular, a resolução de problemas deve ser vista como fundamental, e não como algo que se faz, eventualmente, no final de alguns capítulos como aplicação dos assuntos matemáticos que até então foram aprendidos. Resolver problemas deve ser encarado como um objectivo de ensino, como um conteúdo a trabalhar com os alunos, como uma via educativa tendo em vista a aquisição de conhecimentos em Matemática, o desenvolvimento de capacidades necessárias ao desenvolvimento do aluno enquanto pessoa, ao estudo da Matemática e das outras ciências, a uma real participação crítica e interventiva na sociedade.

A Matemática é, por assim dizer, essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de redes de ideias abstractas e associadas logicamente. Estas ideias surgem muitas vezes da necessidade de resolver problemas em ciência, na tecnologia e na vida quotidiana - problemas que vão da forma como modelar certos aspectos de um problema científico complexo à gestão de um livro de cheques.

A Matemática assenta, como já referi, na lógica e na criatividade, e é estudada tanto pelas suas aplicações práticas como pelo seu interesse teórico. Para algumas pessoas, e não só para os matemáticos profissionais, a essência da Matemática reside na sua beleza e no seu desafio intelectual. Para outros, incluindo muitos cientistas e engenheiros, o valor essencial da Matemática é a sua aplicação à própria actividade. Dado que a Matemática desempenha um papel de tal forma central na cultura moderna, um conhecimento básico da natureza da Matemática é um requisito da instrução científica. Para a alcançar, os estudantes precisam de

entender a Matemática como uma parte do empreendimento científico, compreender a natureza do pensamento matemático e familiarizar-se com ideias e técnicas matemáticas essenciais.

#### **IV - Algumas características da Matemática**

A Matemática é a ciência dos padrões e das relações. Como disciplina teórica, a Matemática explora as relações possíveis entre abstrações, sem ter em conta se essas abstrações têm ou não correspondentes no mundo real. Estas abstrações podem ser tudo aquilo que vai de cadeias de números e figuras geométricas a conjuntos de equações.

A Matemática é também uma ciência aplicada. Muitos matemáticos concentram a sua atenção na resolução de problemas que têm origem no mundo da experiência. Também eles procuram padrões e relações e para isso usam técnicas que são semelhantes àquelas utilizadas na prática da Matemática pura. A diferença reside essencialmente na intenção.

Muitas vezes os resultados da Matemática pura e aplicada influenciam-se reciprocamente. As descobertas dos matemáticos puros revelam frequentemente - por vezes décadas mais tarde - um valor prático imprevisto.

A Matemática pura, ao contrário de outras ciências, não é limitada pelo mundo real, mas, a longo prazo, contribui para uma melhor compreensão desse mundo.

#### **V - Processos matemáticos**

A utilização da Matemática para expressar ideias ou para resolver problemas envolve, pelo menos, três fases:

- 1) a representação de determinados aspectos das coisas de forma abstracta;
- 2) a manipulação das abstrações através de regras de lógica para encontrar novas relações entre elas;
- 3) verificar se as novas relações dizem alguma coisa de útil acerca dos objectos originais.

O raciocínio matemático tem início frequentemente com o processo de abstracção - isto é, com a verificação da semelhança existente entre dois ou mais objectos ou eventos. Os aspectos que têm em comum, quer concretos, quer hipotéticos, podem ser representados por símbolos, como números, letras, outros sinais, diagramas, construções geométricas, ou mesmo palavras.

Este processo de abstracção permite que os matemáticos se concentrem nalgumas características das coisas e alivia-os da necessidade de terem sempre em mente as outras características.

Feitas as abstrações e seleccionadas as respectivas representações simbólicas, esses símbolos tornam-se objectos, que podem ser combinados e recombinaados de várias maneiras, segundo regras definidas com precisão.

Os conhecimentos matemáticos acerca das relações abstractas têm vindo a aumentar desde há milhares de anos e continuam a expandir-se e, por vezes, a ser revistos. Apesar de terem tido início na experiência prática de contar e medir, estes conhecimentos atravessaram muitos níveis de abstracção e hoje dependem muito mais da lógica interna do que da demonstração mecânica. De certa forma, então a manipulação de abstracções é bastante semelhante a um jogo: começar com algumas regras básicas e depois fazer todo e qualquer movimento que se adapte a essas regras - o que inclui inventar regras adicionais e descobrir novas ligações entre as regras já conhecidas. O teste da validade de novas ideias é a sua própria coerência e o facto de se relacionarem logicamente com as próprias regras.

Uma linha central de investigação na Matemática pura consiste em identificar em cada área de estudo um pequeno conjunto de ideias e regras básicas a partir das quais todas as outras ideias e regras interessantes naquela área podem ser deduzidas logicamente. Os matemáticos, como os outros cientistas, ficam particularmente contentes quando descobrem que partes da Matemática anteriormente não relacionadas são deriváveis umas das outras ou de alguma teoria mais geral. Parte do sentido de beleza que muitos vêem na Matemática não reside na descoberta de fenómenos muito elaborados ou complexos, mas sim no contrário, na descoberta da maior economia e simplicidade de representação e prova científica. À medida que a Matemática evoluiu, foram descobertas cada vez mais relações entre partes que se tinham desenvolvido separadamente - por exemplo, entre as representações simbólicas da Álgebra e as representações espaciais da Geometria. Estas ligações cruzadas permitem obter conhecimentos a desenvolver nas várias partes; em conjunto, reforçam a crença na correcção e unidade subjacente à estrutura na sua globalidade.

Geralmente, uma só ronda de raciocínio matemático não produz conclusões satisfatórias e, por isso, tenta-se alterar a forma de representação ou as próprias operações. Na verdade, dão-se frequentemente saltos para a frente e para trás e não há regras que determinem como proceder. O processo decorre, normalmente, entre ajustamentos e recomeços, com muitas curvas em falso e ruas sem saída. Este processo continua até que os resultados sejam suficientemente bons.

## **VI - Ensino da Matemática**

Sócrates terá um dia dito algo que me parece perfeitamente ajustável ao ensino da Matemática:

"As ideias deveriam nascer na mente do aluno e o professor deveria só actuar como uma parteira."

Ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é, segundo Sebastião e Silva, como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos no início, não estejam solidamente apoiadas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam. É necessário fornecer experiências que encorajem e permitam aos alunos dar valor à Matemática, ganhar confiança nas suas capacidades matemáticas, tornar-se em solucionadores de problemas matemáticos, comunicar matematicamente.

Mas, no fim, o problema é sempre o mesmo: interessar o aluno, provocá-lo para a investigação, dar-lhe sem cessar o sentimento de que ele descobre por si próprio o que lhe é ensinado. O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno.

Os programas de todos os países indicam que se devem usar métodos activos, se deve fazer apelo à intuição, se devem encadear os assuntos, se devem adaptar os métodos à idade e às características dos alunos.

O professor de Matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da Matemática a problemas concretos. É sobretudo pela iniciativa pessoal que se pode fazer de uma forma normal o desenvolvimento do espírito matemático: iniciativa do professor, iniciativa do aluno. A iniciativa do primeiro é, porém, muitas vezes impedida pela estreiteza e rigidez dos programas; o segundo, pelo seu lado, não tem geralmente iniciativa porque não lhe transmitiram o gosto por ela. Foi exercitado a trabalhar e aprender, muito pouco a compreender, e nada a procurar.

Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de meios e não de fins.

Os alunos aprendem demasiadas coisas e são transformados em enciclopédias vivas. É, no entanto, verdade que vale mais saber poucas coisas bem do que muitas mal. A grande quantidade de ideias só servirá para confundir o entendimento dos alunos se não forem ministradas com vagar e clareza. No ensino das ciências a escolha dos exemplos é bem mais importante do que o seu número: algumas verdades bem aprofundadas esclarecem mais sobre o método que um grande número de teorias discutidas de uma maneira incompleta. Os programas são muitas vezes impostos aos professores com uma minúcia manifestamente exagerada e de tal modo que em muitos deles se encontra posto em segundo plano este espírito de iniciativa sem o qual o ensino perde toda a vitalidade.

O estado do ensino está necessariamente ligado ao dos nossos conhecimentos e deve mudar quando eles se aperfeiçoam e estendem. Mas a modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. No entanto, no interesse do bom ensino o professor deve não só saber o que ensinar e como o ensinar mas também o porquê do que ensina.

## **VII - O que tem o ensino da Matemática?**

A Matemática é uma disciplina com características muito específicas, únicas. Para estudar Matemática é necessário uma atitude particular assim como é necessário uma atitude muito particular para a ensinar.

Estudar Matemática não é a mesma coisa que estudar outra disciplina (melhor: cada disciplina requer tipos de estudo diferentes).

Os conceitos matemáticos não se aprendem de um momento para o outro e só ao longo do tempo se vai percebendo melhor a coerência interna de cada assunto ou a razão de ser de cada conceito. Os programas com capítulos estanques não facilitam a assimilação lenta; por outro

lado, é muito difícil ensinar de modo que cada aluno possa ir interiorizando à sua própria velocidade.

Para estudar Matemática é necessária uma participação activa, um envolvimento directo por parte do aluno, tanto em cada momento de estudo como ao longo do ano escolar: é necessário voltar várias vezes ao mesmo assunto, de preferência segundo ângulos de abordagem diversificados, para poder aspirar a dominar um conceito.

Por último, mas igualmente importante: dificilmente alguém poderá estudar Matemática com proveito se não tirar algum prazer disso... E não é costume encontrar programas de Matemática que fomentem esse gosto pela Matemática, tanto no ensino básico e secundário como no ensino superior.

Mas não estou a dizer nenhuma novidade!

Toda a gente sabe há muito tempo que a Matemática é diferente das outras ciências. Então, porque é que o ensino da Matemática é tão pouco satisfatório nos dias de hoje? Penso, sobretudo, apesar de alguns esforços terem sido já desenvolvidos, que não tem sido encarado entre nós com a profundidade, serenidade e bom senso necessários. Não se muda o ensino da Matemática de um dia para o outro. É necessário um planeamento a médio e longo prazo, uma execução paciente ao longo de muitos anos, com a participação activa indispensável de todas as pessoas com relação directa ou indirecta com o ensino da Matemática.

### **VIII - Crise no ensino da Matemática**

Em Portugal, nos últimos tempos, tal como já aludí, o Ensino da Matemática tem vivido numa situação de crise permanente. Em todos os graus de ensino, do primário ao superior, o insucesso na disciplina de Matemática atinge índices preocupantes. Não se trata de insucesso apenas no sentido estrito da percentagem de reprovações. Um número crescente de alunos não gosta de Matemática, não entende para que serve estudar Matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância. Mesmo muitos daqueles que conseguem tirar notas positivas, procuram sobretudo dominar técnicas úteis para resolverem exercícios tipo. Os professores mostram-se igualmente descontentes, queixam-se dos programas que são grandes, pouco flexíveis, demasiado abstractos. Não sabem como interessar os seus alunos. E, além disso, sentem-se isolados, com poucas oportunidades para discutirem com os colegas ou para conhecerem as experiências mais interessantes que, apesar de tudo, se vão realizando.

Penso que não exagerarei muito se disser que em muitas escolas e na maior parte das disciplinas - sobretudo em Matemática - há, por parte dos alunos, um sentimento mais ou menos generalizado de desinteresse, de desmotivação com tudo o que isto acarreta de práticas de demissão e de aborrecimento, de mal estar e de desgosto perante as chamadas matérias escolares, quando não pela aprendizagem em geral, pelo saber e, até, sabemos bem, por aquilo que cada um é. Em muitos alunos, quando essa matéria escolar é a Matemática, sentimentos de incapacidade ou de deficiência tornam-se também notórios, fazendo sentir fortemente os efeitos da sua presença, que em muitos casos, acompanharão para sempre o aluno em questão. Por outro lado, a muitos professores cada vez agrada menos o que fazem, os resultados do seu trabalho, o modo como os alunos reagem àquilo que eles lhes ensinam.

O ensino da Matemática atravessa, pois, uma situação de grande desconforto para quem aprende, para quem ensina, sendo também alvo de críticas da opinião pública.

De uma forma um tanto simplista, poderíamos dizer que para muitos alunos fica da Matemática uma imagem de disciplina de insucesso, de inacessibilidade, de disciplina só para alguns. Para outros alunos (com sucesso na disciplina) fica uma ideia de que a Matemática é um puro mecanismo, uma arquitectura perfeita à qual nada haverá a acrescentar.

Para alguns professores fica uma sensação de frustração e de insatisfação pelo trabalho desenvolvido. Para outros, o grande insucesso dos alunos provará o virtuosismo da disciplina e por consequência o seu inevitável papel selectivo.

Para uma parte significativa da opinião pública (com alguns professores incluídos), os alunos não dominam as técnicas de base necessárias que permitem aprendizagens posteriores. Para outra parte, mais ligada ao mundo empresarial, a questão começa a colocar-se na falta de capacidades para responder e resolver problemas que se colocam face aos novos desafios da sociedade, provocados nomeadamente pela crescente utilização das novas tecnologias da informação.

Esta situação um pouco confusa e contraditória, mas de grande insatisfação para a generalidade da comunidade educativa, tem fundamentos que radicam na história recente do ensino da Matemática já que, a última grande reforma que ocorreu na Matemática escolar teve o seu início, em Portugal, em meados dos anos sessenta. Foi a introdução da chamada "Matemática Moderna", em particular contrariando a ênfase tradicionalmente dada ao cálculo.

### **IX - Ensinar-Aprender Matemática: tradição ou necessidade?**

A Matemática, apesar das elevadas taxas de reprovação ou, de uma forma mais lata, do insucesso que existe nesta disciplina, mesmo nos alunos com aproveitamento, e da fonte de insatisfação, desprazer ou frustração que constitui, em geral a sua aprendizagem (e ensino), tem sempre ocupado um lugar de relevo no currículo das nossas escolas.

Haverá, por certo, razões de vária ordem que justificam uma situação como esta.

Sempre se ensinou Matemática, poderemos dizer. Na verdade, esta disciplina é considerada como uma das mais antigas ciências e, como matéria ensinada, faz parte dos currículos escolares, se lhes podemos chamar assim, desde há mais de dois mil anos, tendo aí ocupado sempre um lugar privilegiado (Stone, 1961). O peso da tradição, no entanto, se dá um motivo para a permanência da Matemática nos currículos, esclarece pouco as razões do privilégio que se lhe atribui.

A crença nos efeitos disciplinadores do estudo da Matemática parece constituir uma outra ordem de razões que justificam a sua aprendizagem: "ensina a pensar", "desenvolve o raciocínio".

Segundo Douglas Quadling (1983), no entanto, se é verdade que a actividade matemática proporciona, entre outras coisas, o "hábito de analisar o significado do enunciado", "de estabelecer demonstrações" ou de distinguir o essencial do acessório numa dada situação, o mesmo se pode dizer no caso do estudo de outras disciplinas. Este autor acrescenta mesmo que, sendo a Matemática, eventualmente, uma das formas mais puras do raciocínio, este facto, "do ponto de vista educativo, poderá ser considerado tanto uma fraqueza como uma força" (Quadling, 1983, p. 449).

Razões de uma outra natureza são as que se relacionam com a importância desde sempre atribuída à Matemática, quer para o dia-a-dia das pessoas e para a sua vida profissional, quer para o desenvolvimento das outras ciências, das técnicas e outros ramos da actividade humana. Continuando a citar Quadling (1983), a "Matemática da vida corrente", como ele lhe chama, independentemente da sua real importância é, naquilo que existe de comum na vida das pessoas, cada vez mais aprendida fora da escola do mesmo modo que aprendemos outros conhecimentos que nos são essenciais. Além disso, o desenvolvimento da tecnologia tem vindo a proporcionar máquinas e instrumentos que nos libertam da necessidade de dominar determinadas técnicas e algoritmos matemáticos antes considerados indispensáveis, mesmo para a vida quotidiana. Por outro lado, ensinar a Matemática necessária à prática profissional futura de cada um obrigaria, ao nível da escolaridade básica, ou a um currículo mínimo constituído pela Matemática comum às várias profissões (que dificilmente justificaria uma escolaridade longa em Matemática), ou a uma sobrecarga excessiva e em muitos casos inútil, nos programas da disciplina.

No que diz respeito à relação da Matemática com a realidade e, em particular, com as outras ciências, do ponto de vista do seu ensino, pressupõe-se, em geral, que é preciso aprender primeiro Matemática para depois a aplicar no estudo dessa realidade, na aprendizagem dessas ciências. Esta perspectiva traduz uma concepção segundo a qual a Matemática é vista como uma ferramenta de que as outras ciências se servem no estudo a que se dedicam.

A Matemática é uma ciência antiga, como já antes referi, e, desde sempre, em constante crescimento, quer no que diz respeito ao seu próprio património (em termos de conceitos, métodos e organização), quer nos domínios a que se aplica. Afirma-se mesmo que nos anos mais recentes se tem descoberto mais Matemática que durante toda a sua história (Dieudonné, 1982; Davis e Hersh, 1981). Este crescimento deve-se, por um lado, a forças internas da própria Matemática e, por outro às necessidades e possibilidades colocadas pelo desenvolvimento científico e tecnológico. Há assim relações de mútua fecundidade entre a Matemática e os outros domínios da actividade humana.

## **X- Formas de aprender Matemática**

"Das minhas observações dos homens e rapazes inclino-me a pensar que a minha forma de estudar é a forma comum, a forma natural, e que os professores a destroem e substituem por qualquer coisa que conduz ao ensino mecânico. "

(John Perry, 1901)

A origem das crenças e concepções dos alunos sobre a Matemática pode ser baseada numa variedade de causas, mas uma das mais importantes situa-se ao nível das experiências directas, quer na escola quer junto dos adultos que lhes estão próximos. As concepções que as crianças mais novas desenvolvem influenciam não só o seu pensamento e desempenho durante os primeiros anos, mas também as suas atitudes e decisões sobre o estudo da Matemática em anos posteriores (NCTM, 1991).

As convicções matemáticas não se desenvolvem da noite para o dia. Elas desenvolvem-se lentamente, ao longo de um período de experiências matemáticas. A principal origem das experiências matemáticas para a maior parte dos alunos é provavelmente a aula de Matemática. Assim, aquilo que se faz na sala de aula influenciará extremamente as convicções dos alunos. Estes aprendem muito mais que os conteúdos matemáticos das

experiências da sala de aula. Eles desenvolvem também concepções (formas de encarar a Matemática) que podem ajudá-los - ou constrangê-los.

Quando as crianças aprendem Matemática na escola fazem-no na sala de aula, onde certas normas de conduta estão estabelecidas implícita ou explicitamente. Estas normas influenciam a forma como as crianças interagem com o professor e com os colegas, o que, por sua vez, influencia a Matemática que as crianças aprendem e como a aprendem.

Quando são dadas às crianças oportunidades de conversar acerca da sua compreensão da Matemática, surgem problemas genuínos de comunicação. Estes problemas, assim como as próprias tarefas matemáticas, constituem oportunidades para aprender Matemática.

As crianças são aprendizes notáveis. Basta pensar na enorme quantidade de coisas que aprendem antes do ensino formal - comer, andar, falar... - para chegar a essa conclusão. Aprender a falar, por exemplo, é um processo tremendamente complexo que exige muito da criança. No entanto, a criança não tem aulas para aprender a falar. Falar faz parte da vida, acontece, aprende-se de forma natural.

É espantosa a quantidade de coisas que as crianças aprendem desta forma! Mas, mal entram na escola o panorama modifica-se. Há crianças que progridem, mas muitas, se não a maioria, têm problemas de aprendizagem. Porquê? Em minha opinião isso deve-se ao facto da actividade escolar nada ter a ver com o quotidiano das crianças.

Jean Piaget defende que certos tipos de aprendizagem só acontecem depois dos dez ou onze anos. À aprendizagem que começa nesta fase chamou "aprendizagem formal". O que se aprende no estádio formal não tem raízes na vida real, isto é, na vida social e afectiva da criança e no meio cultural que a cerca. Segundo Piaget, a criança "tem" de aprender essas coisas por meio do ensino formal.

Seymour Papert pensa, porém, que Piaget se enganou ao pensar que determinados conhecimentos e "skills" têm de ser aprendidos formalmente, enquanto outros são aprendidos naturalmente. Ele acredita, tal como Piaget, que a criança constrói as suas próprias estruturas intelectuais. O seu ponto de discórdia é quanto ao papel atribuído ao meio cultural como fonte de "materiais de construção". É a abundância do meio cultural em determinados "materiais" que proporciona que determinadas aprendizagens se processem de forma natural, enquanto a ausência de outro tipo de materiais pode levar a que outras aprendizagens só ocorram após ensino deliberado. A questão fundamental está, pois, em criar uma cultura, um ambiente rico em "materiais" que estimule a aprendizagem natural.

## **XI - As crianças constroem a sua própria Matemática**

Quando são apresentadas às crianças tarefas que fazem sentido para elas, encorajando-as a resolvê-las, as crianças, em vez de seguirem procedimentos que tenham sido apresentados pelo professor, desenvolvem uma variedade de estratégias para alcançar a solução.

Numa situação desafiante, as crianças utilizam os conhecimentos que já têm para desenvolver raciocínios com significado pessoal.

Afirmamos que as crianças não só são capazes de desenvolver as suas estratégias para realizar as tarefas da Matemática escolar mas também que cada criança tem de construir o seu próprio

conhecimento matemático. Isto é, do nosso ponto de vista, o conhecimento matemático não pode ser dado às crianças. Pelo contrário, elas desenvolvem conceitos matemáticos quando se entregam a actividades matemáticas, incluindo a apreensão de "métodos" e explicações que vêem ou ouvem de outros. Este ponto de vista implica que na escola sejam proporcionadas às crianças actividades adequadas ao desenvolvimento de problemas matemáticos genuínos. Estes problemas dão-lhes oportunidade para reflectir e reorganizar as suas formas de pensar.

A Matemática é uma actividade humana criativa e a interacção social na sala de aula desempenha um papel crucial quando as crianças aprendem Matemática.

Tanto a interacção professor-aluno como a que se processa entre os alunos influenciam o que é aprendido e como é aprendido. O professor toma um papel crucial ao conduzir o desenvolvimento do que Silver (1985) chamou uma atmosfera de resolução de problemas, um ambiente no qual as crianças se sentem livres para conversar das suas matemáticas.

O papel do professor é indispensável também para que a regra da turma de que se deve ajudar sempre os colegas, não seja secundária, mas sim um aspecto central do papel dos alunos (Slavin, 1985, p. 16). Desde que esta regra seja assumida, oportunidades para a aprendizagem, que não estão presentes no ensino tradicional, crescem na medida em que as crianças colaboram entre si.

Notamos ainda que as crianças aprendem muito mais do que Matemática neste tipo - ou qualquer tipo - de situações de sala de aula. Desenvolvem convicções sobre a Matemática, sobre o seu papel e o do professor. Além disso, um sentido do que é valorizado desenvolve-se com atitudes e formas de motivação.

Acima de tudo a abordagem que encoraja os alunos a conversar acerca dos seus "métodos" de solução sem os avaliar pela sua correcção é caracterizada pelo desenvolvimento de uma confiança mútua entre o professor e os alunos. O professor confia nos alunos e incita-os a tentarem resolver os seus problemas de Matemática e, conseqüentemente, sente-se livre para lhes pedir que descrevam o seu pensamento. Os alunos confiam que o professor respeita os seus esforços e conseqüentemente entram nas discussões explicando como realmente compreenderam e tentaram resolver os seus problemas de Matemática.

A aprendizagem face à natureza da Matemática

Tanto as respostas correctas como incorrectas podem disfarçar a verdadeira aprendizagem dos alunos! Respostas incorrectas podem representar bons raciocínios, mesmo que baseados em conceitos errados. Respostas correctas, especialmente repetições das palavras do manual ou do professor, podem mascarar falhas de compreensão da Matemática subjacente. Porque é que os alunos substituem as suas próprias estratégias pelas ensinadas pelo professor ou recorrem a regras, fórmulas e definições? Talvez parte da resposta esteja na natureza da Matemática. A abstracção da Matemática não é compartilhada por nenhuma outra disciplina. Embora os seus modelos possam ser usados para ajudar a explicar o mundo real, nenhuma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre os exemplos da vida real e os modelos matemáticos respectivos. A Matemática é também fortemente hierarquizada. Se um aluno tem uma concepção errónea acerca de uma parte desta cadeia lógica, então os bloqueios subsequentes da aprendizagem parecem aumentar de complexidade. Assim, na medida em que a Matemática difere de outras disciplinas, também a sua aprendizagem tem uma natureza diferente. Um exemplo óbvio vem-nos à ideia. Embora a Matemática tenha uma linguagem

especial, não é propriamente uma língua estrangeira. Em Matemática, é preciso mais do que traduzir uma expressão para a linguagem corrente. Por vezes, os alunos não percebem esta diferença e contentam-se quando são capazes de debitar fórmulas e definições em resposta às questões do professor. Inversamente, os alunos que inventam falsos algoritmos podem ter dificuldades com o carácter abstracto da Matemática. Quando as conexões estabelecidas pelo professor são remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos, aqueles que tentam aprender inventam as suas próprias conexões.

A aprendizagem face ao desenvolvimento cognitivo dos alunos

É importante reconhecer que as conexões podem ter significado para o professor e contudo serem remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos. Assim, embora a origem das concepções erróneas dos alunos possa ter, em parte, como causa a natureza da Matemática, estas podem ser, por outro lado, causadas pelo nível do desenvolvimento intelectual dos alunos. O que pode parecer concreto para o professor pode ser visto como abstracto para os alunos. Há mais de cinquenta anos, Brawn (1935) descobriu que os alunos do primeiro ciclo tinham mais dificuldade em operar com números sem unidades (p. ex.,  $5+7$ ) do que com números concretos (p. ex., 5 maçãs + 7 maçãs). Quando faltavam as unidades, a soma indicada não era vista de uma forma simples mas antes como uma abstracção para ser memorizada. Quando estavam presentes as unidades, os alunos pareciam visualizar a situação concreta e eram capazes de responder correctamente.

Os alunos que, aparentemente do nada, inventam ideias erradas podem simplesmente estar a reagir à lacuna existente entre os conceitos matemáticos e o seu significado. A forma como os alunos aprendem depende, pois, tanto da natureza da Matemática como do seu desenvolvimento intelectual.

No entanto, responder ao acaso tem um papel na criação de ideias erróneas ou falsos algoritmos pelos alunos. Estes alunos estão motivados para aprender e tentam dar sentido à Matemática.

Até aqui, considerámos somente uma estreita fatia do complexo bolo que é a aprendizagem dos alunos. É contudo, uma fatia importante que os professores podem estudar e analisar. Quando os alunos reflectem na sua própria aprendizagem e discutem as razões que levaram a uma conclusão aparentemente razoável mas inválida, eles aprofundam a sua compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Da mesma maneira, os professores, ao estudarem os dados das suas aulas, aprendem mais sobre as aprendizagens dos alunos e mais sobre o ensino. "A importância do conhecimento sobre o modo como os alunos aprendem matemática não pode ser minimizada" (NCTM, 1991, p. 146).

## **XII - Princípios de aprendizagem**

"O pensamento é a base em que assenta a aprendizagem"

(Hans G. Furth, P. 231)

A investigação cognitiva tem vindo a revelar que, mesmo possuindo aquilo que é geralmente considerado uma boa instrução, muitos estudantes, incluindo os mais talentosos academicamente, compreendem menos do que aquilo que pensamos que entendem. Esta descoberta sugere que a parcimónia é essencial no que diz respeito à fixação de objectivos

para a educação: as escolas deveriam seleccionar os conceitos e as capacidades mais importantes a salientar de modo a poderem concentrar-se na qualidade da compreensão e não na quantidade de informação apresentada.

Os indivíduos têm de construir os próprios significados, independentemente da clareza com que os professores ou os livros lhes ensinam as coisas. Normalmente fazem-no através da associação dos novos conceitos e da nova informação àquilo em que já antes acreditavam.

Todavia, a aprendizagem efectiva exige muitas vezes mais do que fazer apenas associações múltiplas de ideias novas às antigas. Por vezes é necessário que as pessoas reestruturem o modo de pensar radicalmente. Isto é, para incorporar uma ideia nova, quem aprende tem de alterar as ligações entre as coisas que já conhece ou mesmo pôr de lado algumas convicções de há longa data acerca do mundo. As alternativas a uma reestruturação necessária são a distorção da nova informação, de modo a combinar-se com as ideias antigas, ou a rejeição total da nova informação. Os alunos chegam à escola com as próprias ideias, algumas correctas e outras não, acerca de quase todos os temas que irão provavelmente encontrar. Se se ignorar ou desprezar simplesmente a sua intuição e os conceitos errados, as convicções originais dos estudantes vencerão provavelmente a longo prazo, mesmo que os alunos, nos testes e exames, dêem as respostas que os professores desejam. Não é suficiente a mera contradição das ideias previamente presentes nas mentes dos alunos. Têm de ser encorajados a desenvolver visões novas, ao reconhecerem que essas visões os ajudam a compreender melhor o mundo.

Sabe-se hoje que só existe aprendizagem se os alunos estiverem envolvidos nas actividades a realizar, pois eles constróem, modificam e integram ideias ao interaccionar com o mundo físico, os materiais e os outros indivíduos.

Os jovens podem aprender mais rapidamente acerca das coisas que são tangíveis e acessíveis directamente aos sentidos. Com a experiência, desenvolvem a capacidade de compreender conceitos abstractos, de manipular símbolos, de raciocinar logicamente e de generalizar. Estas capacidades, contudo, desenvolvem-se lentamente e a dependência da maior parte das pessoas em relação a exemplos concretos persiste ao longo de toda a vida. As experiências concretas são extremamente eficazes na aprendizagem quando ocorrem no contexto de alguma estrutura conceptual relevante. As dificuldades dos alunos em apreenderem as abstracções são muitas vezes disfarçadas pela capacidade de recordarem e recitarem termos técnicos que não entendem. Consequentemente, os professores - da pré-primária à universidade - muitas vezes subestimam a capacidade dos alunos para lidarem com abstracções e interpretam a utilização dos termos correctos como prova de compreensão.

Se esperamos que os alunos apliquem ideias a situações novas, então têm de praticar essa aplicação de conhecimentos a novas situações.

Os estudantes não podem aprender a pensar criticamente, a analisar a informação, a comunicar ideias científicas, a fazer argumentações lógicas, a trabalhar em equipa e a adquirir outras capacidades desejáveis, a não ser que sejam autorizados e encorajados a fazer repetidamente essas coisas em muitos contextos.

A mera repetição de tarefas por parte dos estudantes não conduzirá, provavelmente, nem a capacidades melhoradas nem a conhecimentos mais apurados. Muitas vezes, a aprendizagem resulta melhor quando os estudantes dispõem de oportunidades para exprimirem ideias e

obterem reacções (feedback) por parte dos colegas. Porém, para que este feedback seja proveitoso para os alunos terá de ser analítico e sugestivo e chegar numa altura em que os alunos revelem interesse por ele. E tem de haver tempo para os alunos reflectirem sobre o feedback que recebem, se reajustarem e tentarem novamente, uma necessidade que é desprezada, é bom salientar, pela maior parte dos testes, especialmente os exames finais.

Os alunos reagem às próprias expectativas relativas àquilo que conseguem e não conseguem aprender. Se estiverem convictos de que conseguem aprender alguma coisa, quer se trate da resolução de equações ou de andar de bicicleta, normalmente fazem progressos. Se, porém, não têm autoconfiança, a aprendizagem ilude-os.

A autoconfiança dos alunos cresce à medida que experimentam sucessos na aprendizagem, tal como diminui em confronto com fracassos repetidos.

Assim, os professores precisam de fornecer aos alunos tarefas de aprendizagem que apresentem algum desafio, mas estejam ao seu alcance, e de os ajudar a realizá-las com sucesso.

Mais ainda, os alunos detectam rapidamente as expectativas de sucesso ou de fracasso que os outros têm em relação a eles. As expectativas positivas ou negativas reveladas pelos pais, professores, colegas e - de um modo mais geral - pelos próprios meios de comunicação social afectam as expectativas dos próprios alunos e, conseqüentemente, o comportamento na aprendizagem. Quando, por exemplo, um professor assinala falta de confiança na capacidade dos alunos para aprenderem determinados assuntos, estes podem perder a confiança na sua capacidade e obter resultados piores do que poderiam ter obtido noutras circunstâncias. Se este fracasso aparente reforça o julgamento inicial do professor, o resultado será uma espiral desanimadora de uma confiança cada vez menor e de um desempenho cada vez pior.

### **XIII - Professor de Matemática - Ensino da Matemática**

O professor de Matemática é um elemento decisivo na complexa actividade que é ensinar Matemática. Na definição das suas práticas pedagógicas faz intervir, consciente ou inconscientemente, as suas concepções e conhecimento profissional, que orientam as suas acções, desde grandes opções que faz relativamente ao currículo, por exemplo, a aspectos mais particulares da preparação e condução de aulas.

As concepções e as práticas pedagógicas do professor são marcadas por muitos factores. Elas dependem das suas características pessoais e também dos contextos em que estes ensinam, desde o contexto mais restrito da sala de aula ao contexto mais alargado em que a escola se insere. As características destes contextos e as interacções que tem com os elementos que neles encontra (alunos, colegas, outros professores, pais,...) trazem ao professor oportunidades e constrangimentos em termos da sua vivência de ensino da Matemática.

A sala de aula, local privilegiado de interacção directa com os alunos, constitui um dos maiores condicionantes da actividade do professor. O grande número de alunos, associado à heterogeneidade dos mesmos, que se manifesta em diversos modos de estar e em diferentes ritmos de aprendizagem, pode tornar extremamente difícil o trabalho do professor.

Parte das concepções e práticas pedagógicas dos professores resulta precisamente de um processo de adaptação às exigências da complexidade da sala de aula, registada por Feiman-Nemser e Floden (1986) da seguinte forma:

"As salas de aula são contextos complexos e fervilhantes servindo uma variedade de propósitos e contendo uma grande variedade de processos e acontecimentos. Os professores devem gerir grupos, lidar com necessidades individuais específicas, promover a aprendizagem, estabelecer rotinas. (...) Os professores não só têm uma variedade de coisas para fazer, como têm também frequentemente de fazer mais do que uma coisa ao mesmo tempo."

De acordo com Hyde (1989) "o que os professores fazem na sala de aula é função do que pensam sobre a Matemática e o seu ensino. A componente conhecimento está claramente presente, mas existe dentro de uma estrutura mais lata de atitudes, crenças e sentimentos" (p. 226).

Thompson (1984) verificou que "existem razões fortes para que as concepções dos professores (as suas crenças, visões e preferências) acerca da Matemática e do seu ensino joguem um papel importante, afectando a sua eficácia como principais mediadores entre o conteúdo e os alunos" (p. 105). Afirma ainda que "se os padrões de comportamento característicos dos professores são na verdade uma função das suas visões, crenças e preferências acerca da disciplina e do seu ensino, então qualquer tentativa para melhorar o ensino da Matemática deve passar pela compreensão das concepções dos professores e como elas estão relacionadas com as suas práticas" (p.106). O contexto da escola, nomeadamente a nível das condições logísticas para a realização das actividades de ensino e, mais importante, a nível das relações de trabalho entre professores, constitui igualmente um contexto que marca a vivência de ensino dos professores.

Parte das concepções e práticas pedagógicas dos professores resulta precisamente de um processo de adaptação às oportunidades e constrangimentos da escola.

Alguns investigadores (Ernest, 1989; Thompson, 1992) mostram que as concepções dos professores acerca da Matemática e do seu ensino desempenham um papel significativo no desenho de padrões comportamentais durante a sua prática. A relação entre as concepções dos professores acerca do ensino da Matemática e a sua prática é de natureza complexa.

Ernest (1989) identificou, entre outros, três aspectos que influenciam a prática de ensino dos professores de Matemática: (1) concepções dos professores acerca da natureza da Matemática, assim como as suas teorias pessoais acerca do ensino e aprendizagem; (2) o contexto social da situação de ensino; e (3) o nível de reflexão e de processos de pensamento do professor. Segundo o mesmo autor, o ensino da Matemática depende essencialmente do sistema de convicções do professor de Matemática, em particular da sua concepção da natureza e significado e dos seus modelos mentais de ensino e aprendizagem.

Se as concepções e as práticas de um professor estão interligadas, parece pertinente descobrir os mecanismos dessa ligação. Investigadores detectaram vários graus de consistência entre as convicções e perspectivas defendidas por professores acerca da natureza da Matemática e da sua prática.

Em relação às concepções sobre o ensino e a prática, uns detectaram um alto grau de concordância (Shirk, citado em Thompson, 1992), enquanto outros detectaram um fraco grau de concordância (Thompson, 1992; Cooney, 1983). Uma das justificações para estas inconsistências, segundo Thompson (1992), é o contexto social no qual o ensino da Matemática se desenrola e o efeito de socialização do grupo de professores da mesma escola que, apesar de terem concepções diferentes acerca da Matemática e do seu ensino, muitas vezes adoptam práticas idênticas.

Thompson (1992) refere que não se compreende a relação existente entre as concepções e as práticas, pois ainda não se possui uma ideia clara sobre como os professores mudam e reorganizam as suas convicções, e como a sua prática é influenciada pelas suas concepções relativamente à Matemática.

Para Kilpatrick e Wilson (1983), ensinar Matemática requer um conhecimento tanto de Matemática como do seu ensino. Requer também do professor um conjunto de competências ao nível do saber fazer, que remetem para a sua participação activa no desenvolvimento curricular, na investigação pedagógica, e na prática matemática. Enfim, requer igualmente uma valorização da dimensão da relação humana da educação e um empenhamento no ensino da Matemática como profissão.

As concepções dos professores de Matemática têm sido como já referi, objecto de diversos estudos de investigação. Mas para além das suas concepções e práticas, é preciso entendê-lo como um profissional dotado (ou carente) de saberes práticos muito específicos que lhe permitam o desempenho das suas funções - em que avulta, em primeiro lugar, a realização das suas tarefas lectivas - e o seu contínuo aperfeiçoamento. Deste modo, é preciso ter em atenção o desenvolvimento da sua capacidade de análise e formulação de problemas educativos, de concepção, execução, avaliação de projectos pedagógicos, de trabalho em grupo e de reflexão sobre as práticas. É preciso, ainda, considerar o professor como um profissional que actua num dado contexto organizativo e institucional, e como tal define os seus próprios projectos de investimento (ou desinvestimento) pessoal.

A forma como cada um de nós, professores de Matemática, encara a disciplina que lecciona, desde esse saber com que lidamos à forma como entendemos o que é ensinar e aprender Matemática, vai influenciar as nossas decisões na sala de aula, particularmente a nossa forma de abordagem dos assuntos e a ênfase que atribuímos a determinados temas em detrimento de outros. Neste sentido, René Thom afirma, "toda a pedagogia da Matemática, mesmo que pouco coerente, assenta numa filosofia dessa ciência", o que nos pode levar a concluir que mudanças nas concepções dos professores sobre a Matemática podem contribuir para mudanças significativas no ensino desta ciência.

Com efeito, embora possa haver inconsistências entre o que os professores dizem e o que praticam, as concepções de cada professor sobre a Matemática parecem influenciar, de facto, o seu ensino, se bem que não se relacionem de uma maneira simples e directa com as decisões e comportamentos de ensino.

Importa reflectirmos sobre as concepções que nós professores temos, sobre a Matemática. Assim...

Se a virmos na perspectiva de uma ciência

-estática

-imutável

-incólume ao erro

-pura

-desligada do real, abstracta, só acessível a "génios"

-que informa essencialmente

-sinónimo de cálculo único... estaremos, necessariamente, a enveredar por um tipo de ensino que:

-privilegia o produto (resultado), o que pressupõe que o aluno parta para a prática equipado com uma teoria, e a pratique através de um conjunto de "rotinas" e modos de "fazer";

-prima pela irrefutabilidade, onde os problemas têm uma, e uma só solução, não valorizando a criatividade;

-o aluno é sujeito passivo e só se espera que absorva "calado" toda a sabedoria do professor;

-o professor é o técnico transmissor de uma verdade inabalável de que é detentor.

A esta perspectiva contrapõe-se outra, que lhe é antagónica - a de uma ciência:

-dinâmica

-questionável (sempre sujeita a revisão)

-que admite diferentes formas de cálculo e de pensamento

-que utiliza a pedagogia do erro (aprende-se com as respostas erradas)

-que é "para todos" (pois o conhecimento constroi-se com a colaboração e o empenho de todos os intervenientes, onde cada um dá o que tem, o que pode, e o que sabe)... capaz de accionar um tipo de ensino totalmente diferente da anterior que privilegia e valoriza um processo de ensino - aprendizagem:

-activo, feito à base da confrontação de diferentes ideias, da comunicação matemática, de conexões e conjecturas;

-onde a prática conduz à teorização, o que pressupõe muito estímulo, muito empenho, organização do saber;

-que admite várias soluções para uma mesma situação;

-que fomenta a cooperação, a criatividade, o espírito de empenho no trabalho e a autonomia;

-onde os papéis dos intervenientes se alteram significativamente, tornando-se o aluno "o agente da sua própria aprendizagem" e o professor o "dinamizador" do trabalho, o "negociador de intenções", o "companheiro de descoberta".

Conscientes do grande desafio que é preparar os nossos alunos para um futuro, que se nos afigura já altamente tecnológico, e que exige de cada indivíduo um enorme potencial criativo que lhe permita lidar com situações do dia-a-dia profissional, cada vez mais diversificadas e complexas, não será difícil apoiar incondicionalmente esta última perspectiva de Matemática - a da "construção do próprio saber".

É aqui que reside todo o sentido da necessidade absoluta de uma urgente mudança na nossa atitude enquanto professores.

Mas não é fácil!

Os professores têm da Matemática uma ideia que foi sendo construída e sedimentada ao longo da sua vida por vivências intelectuais e afectivas mais ou menos intensas, pelo contacto que com ela tiveram no seu percurso académico e nas ofertas de formação que lhes foram proporcionadas, pelas representações que a sociedade tem da mesma e também pelo confronto com as práticas, onde estão presentes variáveis tão importantes como as atitudes dos alunos, as dinâmicas de grupo, etc.

Pode dizer-se que aquilo que acontece na sala de aula está marcado pela visão da Matemática que o professor persegue, parte da qual pode ser explicada pela sua aprendizagem enquanto estudante e varia entre a exposição "clara", seguida de explicação e o envolvimento dos estudantes em situações que partem de problemas e privilegiam a descoberta, embora seja a primeira a que corresponde ao comportamento mais generalizado.

As concepções que os professores têm sobre o ensino da Matemática têm implicações nas decisões que tomam, quer previamente quando escolhem e planeiam, quer quando interagem na sala de aula. Parece ser no quadro desta experiência de sala de aula que o professor interpreta o conhecimento matemático dos seus alunos, que, por sua vez, vai ter uma forte relação com as suas concepções de ensino.

#### **XIV - Papel do professor de Matemática:**

##### **1) Favorecer o desenvolvimento da comunicação e da partilha de raciocínios**

É necessário deixar raciocinar o aluno, exprimir livremente os seus pensamentos, para se conseguir ensinar (sistematizar e provocar novas aprendizagens matemáticas).

Não é possível, no acto pedagógico, estar com o aluno, sem que ele esteja connosco. É vital que a criança saiba "pular" nos seus raciocínios, como deve saltar à corda, como sabe brincar ao pião.

Hoje em dia, é salientado que a resolução de um problema deve constituir um momento especial de interacção e diálogo. O professor, como moderador, deve acolher as respostas, formular novas perguntas e ainda estimular a partilha das diversas estratégias apresentadas

para a obtenção de um resultado. É urgente que, desde cedo, o aluno partilhe os seus raciocínios com os colegas. O professor deve estar atento para conhecer e compreender os processos mentais dos alunos. A intervenção posterior daquele deve ser no sentido de sistematizar raciocínios e apresentar as abordagens mais significativas. O papel do professor está a mudar e é preciso que ele esteja consciente das novas atitudes e dos diferentes desempenhos.

Os alunos, ao colocarem em comum os seus processos intelectuais, ao aprenderem com os seus próprios raciocínios e com os dos outros, incorporam novas formas de pensar e de integrar a informação. Estas atitudes realçam o papel social e humano da Matemática na escola.

É importante que o processo de ensino-aprendizagem da Matemática privilegie não só o raciocínio individual, mas que provoque também a partilha e o estimule com outros saberes matemáticos.

De facto, é imperioso viver o processo de ensino-aprendizagem da Matemática em diálogo com os alunos e não para os alunos. O professor é alguém que provoca diálogos, que os reforça e que harmoniza as propostas de solução, tendo como pressuposto os saberes científicos.

Não pode, pois, entender-se o processo de ensino-aprendizagem sem se compreender o processo de comunicação. Deste modo, o professor deve tentar eliminar quaisquer interferências nas suas mensagens, devendo para isso minimizar os ruídos no sentido de obter uma boa sintonização por parte dos alunos. Para que tal aconteça convém ao professor:

- conhecer o nível intelectual e as informações que os alunos já possuem;
- conhecer a proveniência social dos alunos, evitando conflitos Escola-Meio;
- utilizar estratégias conducentes ao interesse dos alunos (fazendo uso da motivação contínua);
- fornecer um feedback aos alunos pela avaliação formativa oral e escrita que deve estar omnipresente no processo de ensino-aprendizagem.

## 2) Ensinar o aluno a pensar

Ensinar não é somente transmitir, transferir conhecimentos de uma cabeça para a outra(s). Ensinar é fazer pensar, é estimular o aluno para a identificação e resolução de problemas, ajudando-o a criar novos hábitos de pensamento e acção. Deste modo, o professor deve conduzir o aluno à problematização e ao raciocínio, e nunca à absorção passiva das ideias e informações transmitidas. Além disso, para ser um bom comunicador, o professor deve gerar empatia, deve tentar colocar-se no lugar do aluno e, com ele, problematizar o mundo. Dessa maneira, irá simultaneamente transmitir-lhe novos conteúdos e ajudá-lo a crescer no sentido do respeito mútuo, da cooperação e da criatividade.

Para ser eficiente, o professor deve determinar o nível de desenvolvimento dos seus alunos, utilizar estratégias conducentes à melhor e mais fácil aprendizagem por parte destes, e ajudá-los a aprender consoante as suas capacidades.

Frequentemente, depois de se ter explicado determinado assunto e de ter atingido grande parte dos objectivos planeados, verifica-se frustrantemente que o resultado obtido junto dos alunos é bastante diferente daquele que fora previamente planificado.

Segundo Gagné (1971), o sucesso num tipo de aprendizagem depende dos pré-requisitos desse conhecimento e que são tipos mais simples de aprendizagem. Deste modo, para resolver certos problemas (linguísticos, matemáticos,...), o aluno deve aprender associações ou factos específicos e diferenciá-los; seguidamente deve aprender conceitos que começam por ser gerais até se tornarem específicos. Só depois o aluno atinge o conhecimento de certos princípios que lhe permitirão resolver os problemas iniciais. Trata-se assim, de um processo bastante lógico que começa no geral e acaba no particular, iniciando-se no simples e terminando no complexo.

É necessário ter sempre em conta que determinados conceitos, tornados evidentes para o professor, nem sempre são claros para os alunos, e sem o seu conhecimento não se pode avançar para matérias mais complicadas que pressuponham conhecimentos anteriores assimilados.

Nem todos os alunos têm as mesmas capacidades de entender um dado conceito. Este facto tem origem em múltiplos factores, entre os quais se podem apontar o nível etário e a proveniência intelectual e social dos alunos.

Segundo Jean Piaget (1969), o único meio que a criança pequena tem de organizar o seu pensamento é perceptivo. Assim, o mais importante são os factos e a realidade desnudada de quaisquer conotações, tal como os sentidos a apreendem.

Se o professor não conhecer bem o desenvolvimento intelectual dos seus alunos, pode levar a cabo as aulas mais interessantes e estimulantes que possa imaginar que, mesmo assim, a maioria dos alunos dificilmente conseguirá atingir os objectivos previamente estabelecidos. E se os alunos não tiverem capacidades para a compreensão dos trabalhos propostos e/ou dos assuntos novos a apresentar, então a aprendizagem será nula.

Uma das mais importantes implicações da teoria do psicólogo J. Piaget é que a aprendizagem mais eficiente ocorre quando o professor combina a complexidade da matéria com o desenvolvimento cognitivo dos seus educandos, tendo em mente que nem todos os alunos de uma turma estão no mesmo ponto do seu desenvolvimento intelectual.

É curioso notar que o tipo e a qualidade de pensamento na aula podem ser fortemente influenciados pelo comportamento do professor.

3) O professor de Matemática deve estabelecer um ambiente de aprendizagem em que os alunos sejam capazes de alargar e aprofundar a sua reacção à beleza das ideias, dos métodos, dos instrumentos, das estruturas, dos objectos, etc.

Os professores deviam reconhecer que, para muitos alunos, a aprendizagem da Matemática envolve sentimentos de grande ansiedade e medo de fracassar, o que, sem dúvida, é uma consequência, em parte, daquilo que é ensinado e do modo como é ensinado e de atitudes transmitidas acidentalmente nos primeiros tempos de escolaridade por pais e professores que, eles próprios, não se sentem à vontade com a Matemática. Contudo, em vez de desprezar a ansiedade relacionada com a ciência e com a Matemática como algo sem fundamento, os

professores deviam garantir aos alunos que compreendem o problema e que trabalharão com eles no sentido de o ultrapassarem.

O que tem que mudar no ensino da Matemática?

Não existe um só método que tenha dado o mesmo resultado com todos os alunos... O ensino torna-se mais eficaz quando o professor conhece a natureza das diferenças entre os seus alunos.

Mais importante do que uma alteração ao nível dos conteúdos a incluir na Matemática escolar, é uma mudança nos métodos de ensino e na natureza das actividades dos alunos (APM, 1988).

Mudanças sociais e tecnológicas têm implicado um repensar da escola e dos seus objectivos. As perspectivas com que se encara o processo de ensino-aprendizagem mudam na medida em que se vão desenvolvendo novas teorias sobre a forma como aprendemos e pensamos.

Resultados de investigações em Psicologia apontam no sentido de que, em muitas situações, é a análise de uma tarefa para o desempenho da qual não se possuem conhecimentos prévios que proporciona situações de aprendizagem em que são assimilados novos conhecimentos e estabelecidas novas relações (Resnick, citada por NCTM 1989). Esta ideia, que se opõe à de uma aprendizagem concebida como um processo de absorção reforçado por uma prática repetitiva, implica que no trabalho escolar se proporcionem aos alunos experiências diversificadas com base nas quais eles possam construir os seus próprios conhecimentos, relacionando-os com os anteriores.

Para Polya (1981), "aprender a pensar" é a grande finalidade do ensino. A aprendizagem deve ser activa, motivadora e processar-se em fases consecutivas. Assim, para este autor, devem ser proporcionadas situações de aprendizagem que despertem o interesse dos alunos e em que eles sejam desafiados a descobrir resultados e a estabelecer relações. Considera ainda que a aprendizagem deve ter em conta o "princípio das fases consecutivas", em que uma fase exploratória precede a formalização de conceitos, culminando com a integração numa estrutura conceptual.

Romberg (1984), salienta que ao encarar o ensino da Matemática como um processo em que o aluno absorve conhecimentos que alguém já desenvolveu, e ao considerar a aquisição de conceitos e técnicas um fim em si mesmo, se perdem características essenciais da actividade matemática como explorar, levantar hipóteses e demonstrar, abstrair e generalizar, formular e resolver problemas, criar modelos.

Ao deslocar o papel do aluno de um mero receptor de informação para um participante activo na construção do seu conhecimento matemático, é fundamental interrogarmo-nos sobre o que fazem os alunos na aula de Matemática, que experiências de trabalho lhes são proporcionadas e com que perspectivas são elas trabalhadas e exploradas.

Hoje em dia, o que é importante (principalmente no que refere ao Ensino Básico) não é o conteúdo, porque o conteúdo esquece, mas desenvolver as capacidades dos alunos.

Parece tudo demasiado simples e natural! De facto, poderá sê-lo se houver condições de trabalho e se o professor acreditar nas teorias de aprendizagem propostas para o desenvolvimento intelectual do aluno nesta área. Apesar das condições adversas de trabalho, a

motivação intrínseca, em geral, existe e alimenta-se. No entanto, a atitude do professor precisa de se renovar à luz das suas próprias reflexões, das dúvidas que levanta, dos documentos que lê, das exigências que lhe fazem, das responsabilidades que sente.

Não basta dizer faça-se, e faça-se deste modo!

É necessário compreender o caminho para desenvolver o processo e conhecer, pelo menos, algumas alternativas de percurso. É minha convicção que a atitude do professor, do ponto de vista humano, ético, pedagógico, científico, determinará o próprio sucesso educativo: o seu, o do aluno, o da turma, o da escola, o da comunidade educativa e, conseqüentemente, o da sociedade. Mas, para que tal aconteça, não é apenas compulsando e reflectindo sobre o programa oficial de matemática - demasiado condensado - que se renovam atitudes, procedimentos e competências. É necessário conjugar esforços. A partilha das fontes de (in)formação e de documentos de reflexão deve ser o gérmen da comunicação entre os professores.

## **XV - Novos papéis se impõem ao professor de Matemática**

A formação de um Homem novo, flexível, crítico e adaptativo é um imperativo dos nossos dias. Aceitando que a Escola tem grandes responsabilidades nesta formação, é necessário encontrar processos de a implementar. Sendo assim:

...os professores, devem questionar o modo como estão a preparar pensadores, alunos capazes de se interessarem e continuarem a aprender, durante e depois da escolaridade.

Relativamente ao papel do professor, o documento do ICMI (1986) identifica-o como gestor de uma multiplicidade de recursos de aprendizagem e caracteriza-o como um guia na aprendizagem dos seus alunos. Esta posição exige do professor novas capacidades e o reconhecimento de um novo papel na aula, com um estilo pedagógico mais aberto, ajudando na tarefa de construção do conhecimento matemático do aluno. Esta mudança deve passar por proporcionar actividades em que os alunos possam investigar, discutir as suas ideias e escrever o que descobriram, o que pode ajudá-los a serem mais reflexivos, tomando consciência de qual é o seu conhecimento matemático. No mesmo sentido, Ball et al. (1987) reconhecem a grande diversidade de papéis que o professor é chamado a desempenhar, afirmando-se como peça essencial no ambiente de aprendizagem criado, na medida em que seja capaz de transferir parte da responsabilidade da aprendizagem para os alunos.

Alguma coisa tem que mudar na formação dos professores

Várias investigações têm apontado que a nossa filosofia pessoal e colectiva acerca da Matemática e do seu ensino influenciam de forma decisiva a forma como ensinamos e reflectem-se no modo como os alunos aprendem Matemática. Os professores são, assim, os principais responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem dos alunos. Estão, pois, num lugar chave para influenciar as suas concepções.

Assim, desde os anos 80, a Escola é encarada como um espaço de intervenção e de mudança, onde as concepções e práticas dos professores se desenvolvem e se confrontam; onde a formação, a investigação e a mudança se equacionam e realizam. Não obstante tudo isto, verifica-se que é muito difícil mudar uma rotina em que estão mergulhados os professores há longos anos; é muito difícil mudar atitudes e estruturas desde há muito existentes.

Convenço-me pois, de que, se nada de importante ocorrer no seu processo de formação, os professores terão tendência para ensinar como foram ensinados - transformam-se, geralmente, em espontâneos veículos de uma atitude conservadora.

Assim, do meu ponto de vista, é urgente que na formação de professores, para além da preocupação com o domínio de áreas do conhecimento mais ou menos especializadas, se dê também prioridade ao desenvolvimento de atitudes que permitam, ao professor não só "aceitar" a mudança e a inovação mas ser ele próprio agente de mudança através de práticas de reflexão, partilha e cooperação.

Assim, neste contexto, é muito importante que o professor possa reflectir em conjunto e realizar a troca e aprofundamento das suas ideias, experiências e trabalhos realizados, daí a necessidade de existir uma verdadeira dinâmica de grupo quer na escola quer no grupo de formação onde o professor eventualmente esteja integrado.

Por tudo o que referi, devemos ter em mente que através das actividades de formação pretende-se "obter" professores que não se limitem a imitar os formadores, mas que se comprometam (e reflectam) na educação dos indivíduos numa nova sociedade; professores que não sejam apenas técnicos mas também criadores.

E como é que os professores podem continuar o seu desenvolvimento profissional fora dos momentos formais de formação? Uma possibilidade importante é a análise e a reflexão relativas às informações que podem obter nas suas aulas, como por exemplo, as respostas dos alunos no processo de aprendizagem matemática.

Para concluir, e reflectindo na minha própria formação, apetece-me "pensar alto" e dizer:

Pensar em mudar os outros é presunçoso; trabalhar para a mudança em mim próprio serve como exemplo para os outros. Trabalhar para me mudar a mim próprio é essencial se eu pretender ajudar os outros a mudar também.

.....

Para agir de maneira diferente tenho que ter disponível uma forma de actuação distinta, talvez obtida a partir da observação de outras pessoas, ou possivelmente a partir da leitura ou da discussão com outros colegas.

.....

.....

"Só quando eu tiver consciência de mim próprio, é que eu efectivamente despertei e me tornei verdadeiramente livre."

(Mason, 1985)

Em jeito de síntese - reflexão final...

"A educação pode ser definida como uma metodologia: a aprendizagem do aprender."

(Pierre Furter)

"A aprendizagem começa com acção e percepção, desenrola-se com palavras e conceitos e deveria terminar com hábitos mentais desejáveis."

(Polya)

A escola é em si mesma geradora de um dos grandes paradoxos do nosso tempo: por um lado, verifica-se que a Matemática "invadiu" a nossa sociedade tornando-se num instrumento poderoso; por outro lado, nunca como agora a Matemática foi tão odiada. O professor de Matemática sem ser um matemático é alvo desse sentimento.

À primeira vista a situação descrita parece inexplicável, mas vem dar cada vez mais força à ideia de que a escola está a tornar-se num mundo à parte. A educação é repetidamente referenciada como alguma coisa que providencia uma preparação do indivíduo para a vida, permitindo-lhe uma integração harmoniosa e participativa. É, também, reconhecido o atraso com que a escola acompanha as grandes transformações da sociedade, o que questiona seriamente a ideia que apresentámos anteriormente. Perante tais factos, apetece perguntar:

Quem puxa quem?

O conhecimento escolar, e em particular o matemático, existe de outra forma no nosso dia-a-dia. Na escola esse conhecimento é-nos apresentado, pretensamente, mais organizado. Essa pseudo-organização é, sobretudo, sinónimo de acorrentamento de ideias e rigidez criativa, em vez de sistematização efectiva e proveitosa.

Não é novidade para ninguém que a Matemática está quase omnipresente nas nossas vidas, mas de uma forma irreflectida. A maioria das pessoas não tem noção das suas implicações, tanto no plano individual como colectivo.

Compete à escola, ou deveria competir, o desenvolvimento da capacidade crítica que tornará o indivíduo verdadeiramente livre. O que é que tem sido feito neste sentido em relação à Matemática enquanto disciplina escolar? Se calhar, ao invés de formar indivíduos auto-suficientes e críticos - aumentando, por exemplo, a percepção matemática da vida - a Matemática tem agravado este quadro, concorrendo para a perda do significado da mesma. Num tempo de reforma, olhar para trás é extremamente útil, tentando identificar e exterminar os males e preservar as coisas boas.

#### **XVI - O que é que deveríamos exterminar?**

- a) A reduzida articulação entre a Matemática escolar e a da vida;
- b) O excessivo formalismo da Matemática escolar;

c) O papel excessivo concedido ao cálculo e aos automatismos.

A reduzida, por vezes quase inexistente, ligação entre a Matemática que se ensina nas escolas e a Matemática que se utiliza diariamente cria nos alunos um problema de significação. Muitos questionam-se: "Afinal para que serve esta Matemática?". Sendo a Matemática uma criação da mente humana, logo abstracta, a sua partilha com outros implica a existência de um certo significado intrínseco, uma certa interdependência com a realidade. Na maioria das vezes ela não é visualizada - em termos de significado - pelo "aprendiz", também por culpa do excessivo formalismo que submerge tudo. A mensagem matemática é veiculada de tal forma e espartilhada pela simbologia que não permite a captação da sua essência. Assim, a forma/meio suplanta de longe o significado/fim, tornando-se num obstáculo à compreensão.

Os dois grandes "males" que citámos poderão surgir como consequência um do outro. Neste sentido, a falta de ligações com a realidade levou a disciplina de Matemática a voltar-se sobre si mesma, isolando-se numa concha pouco permeável. A formalização desmesurada surge então como uma necessidade de preencher um certo vazio. O formalismo excessivo pode ser, por outro lado, o inibidor de uma aproximação da Matemática à vida.

O papel excessivo que foi atribuído ao cálculo, às rotinas, aos exercícios automáticos, reveste-se de alguns aspectos motivadores como:

- ter subjacente a ideia que a aprendizagem se faz por repetição e esforço;
- ter na base a concepção que os conteúdos são um fim em si mesmos;
- haver a necessidade do mundo Matemática/Aula ter uma existência prática;
- ser do ponto de vista do professor um ensino mais "fácil".

A ultrapassagem desta inadequação do ensino da Matemática passa por modificações ao nível das finalidades, conteúdos e métodos. Os conteúdos devem ser, em cada momento, interiorizados pelos alunos como úteis e fazendo sentido. Os métodos estão directamente relacionados com as finalidades que se pretendem que presidam ao ensino da Matemática. Destas, destacamos as que nos parecem mais importantes:

- a) Desenvolver as capacidades de raciocínio, comunicação, sentido crítico e criativo;
- b) Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de compreensão do real;
- c) Promover a realização do indivíduo como pessoa, favorecendo as atitudes de autonomia e cooperação.

Reflectamos sobre estas finalidades.

Até que ponto elas estão a ser atingidas?

Consideremos a primeira que nos parece basilar. Como já referimos, a nossa sociedade está em mudança permanente. Aquilo que há meia dúzia de anos era o modelo a seguir deixou rapidamente de o ser. No século passado os conteúdos que os alunos aprendiam na escola

iriam ser-lhes úteis durante grande parte da sua vida. E hoje? Mais do que fornecer um conjunto organizado de conhecimentos, passíveis de serem desactualizados, deveremos desenvolver um conjunto de capacidades que tornem o aluno num indivíduo adaptativo. Será que a escola está a perseguir este objectivo? Pensamos que não, porque mais do que desenvolver capacidades de raciocínio desenvolve-se a memória em massa, o trabalho repetitivo e extremamente localizado.

Estará o ensino da Matemática a favorecer as atitudes de autonomia e cooperação? A resposta é, mais uma vez, negativa. Quantos de nós utilizamos sistematicamente - que não é sinónimo de sempre - o trabalho em grupo nas aulas de Matemática? As atitudes de autonomia e cooperação constituem uma dualidade que só poderá ser adquirida se os alunos forem confrontados com uma alternância planificada de formas de trabalho. A prática da escola dos nossos dias desenvolve o individualismo isolacionista e a competição desenfreada.

Tornar a Matemática num instrumento de análise e intervenção do real é outra finalidade que só muito pontualmente poderá ser atingida. Estudos recentes mostram que existe uma barreira que não possibilita a comunicação de conhecimentos entre a Matemática escolar e a vida diária. Os alunos não levam as suas vivências extremamente ricas para dentro da sala de aula, também porque inicialmente não fazem uma leitura da realidade socorrendo-se de instrumentos matemáticos.

Num tempo que se espera que seja de viragem, quais os grandes desafios que presentemente se colocam à disciplina de Matemática?

A sociedade atingiu um tal grau de complexidade, estabelecendo um tão grande número de relações que não se pode esperar que a escola adquira nesta um papel central. Por outro lado, a escola, e neste caso particular a Matemática, não pode renunciar ao seu papel. Não se trata de uma questão de poder, não interessa determinar quem tem mais domínio, interessa sim, que cada um, no seu local, desempenhe a sua tarefa de uma forma bastante flexível.

Assim, é imperioso que a disciplina de Matemática:

- saiba dar aos alunos um papel mais activo na construção do seu próprio conhecimento;
- saiba conjugar harmoniosamente objectivos do domínio cognitivo, mas também do plano afectivo e social;
- saiba estabelecer relações com a realidade envolvente, favorecendo o movimento de "marés" entre a Matemática e aquela. A resolução de problemas e as aplicações da Matemática são, neste contexto, veículos essenciais;
- saiba estabelecer relações fortes com as outras disciplinas - fomentando a interdisciplinaridade - para que em conjunto criem instrumentos globais de avaliar o real;
- saiba ser a realidade e não uma recriação artificial desta. É importante que em cada momento saiba utilizar, atempadamente e com naturalidade, as novas tecnologias. Observe-se a dificuldade com que os computadores e as calculadoras estão a penetrar na sala de aula.

A Matemática está perante velhos problemas e novos desafios. As insuficiências que nós hoje apontamos foram já identificadas há muito. Este facto deverá constituir um desafio estimulante para que não tornemos esses problemas cada vez mais velhos.

Se a Matemática souber "dar a volta", vencendo os desafios que lhe são propostos, ela deixará de ser a disciplina onde se faz o Ensino da Matemática - com toda a carga depreciativa aliada a uma transmissão unívoca de conhecimentos - para ser a disciplina onde se faz Educação Matemática.

## **Referências**

APM (1988). Renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.

Brawnel, William A. (1935). Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic. New York: NCTM and Teachers College Press, Columbia University.

Caraça, J. A. (1970). Conceitos fundamentais da Matemática. (Vol I, II, III). Lisboa: Sá da Costa.

Cooney, T. (1983). Espoused Beliefs and Beliefs in Practice: The cases of Fred and Janice. In PME (Eds). Proceedings of Fith Annual Meeting. Montreal:PME.

Davis, P. e R, Hersh (1981). The mathematical experience. Boston: Birkauer.

Dieudonné, J. (1982). Mathématiques vides et significatives. In Penser les mathématiques. Paris: Seuil.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and atitudes of the mathematics teacher: A model. Journal of Education for Teaching, 15 (1), 13-33.

Feiman-Nemser, S. & Floden, R. (1986). The Cultures of Teaching. In M. C. Wittrock (Ed. ), Handbook of Research on Teaching (pp. 505-526). New York, NY: Macmillan.

Furter, P. (1966). Educação e reflexão. Petrópolis: Ed. Vozes.

Furth, H. G. (1974). Piaget na sala de aula. Trad. de DonaldsonM. Garschagen. Rio de Janeiro: Forense Univ.

Gagné, R. (1971). Como se realiza a aprendizagem. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.

Guimarães, H. (1992). Concepções, práticas e formação de professores. In IIE (ed. ). Educação Matemática. Lisboa: IIE.

Hyde, A. (1989). Staff development: Directionsand realities. Em New directions for elementary school mathematics (pp. 223-233). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

ICMI. (1986). School Mathematics in the 1990's. Cambrige: University Press.

Kilpatrick, J. & Wilson, J. W. (1983). Taking Mathematics Teaching Seriously: Reflections on a Teacher Shortages in Science and Mathematics. Washington: DC.

Mason, J. (1985). Only Awareness is Educable. Mathematics Teaching, 120. Setembro.

Matos, J. F. (1992). Atitudes e concepções dos alunos: definições e problemas de investigação. In IIE (Ed). Educação Matemática. Lisboa: IIE.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Va. : The Council.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. New York: Basic Books.

Piaget, J. (1969). Seis estudos de psicologia. Rio de Janeiro: Ed. Forense.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery (combined edition). New York: Wiley.

Quadling, D. (1983). De l'importance des mathématiques dans l'enseignement. Perspectives, vol. XII, N° 4, 445-454.

Romberg, T. (1984). School Mathematics: Options for the 1990s. Washington, Dc: U.S. Department of Education.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions. N. J. : Lawrence Erlbaum Associates.

Slavin, R. (1985). An introduction to cooperative learning research. New York: Plenum Press.

Stone, M. (1961). La réforme des études de mathématiques. In Mathématiques Nouvelles. Paris: OECE.

Thompson, A. (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. Educational Studies in Mathematics, 15, 105-127.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (ed. ). Handbook of research in mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.

---

\* Equip. a Assistente do 2º Triénio da ESEV