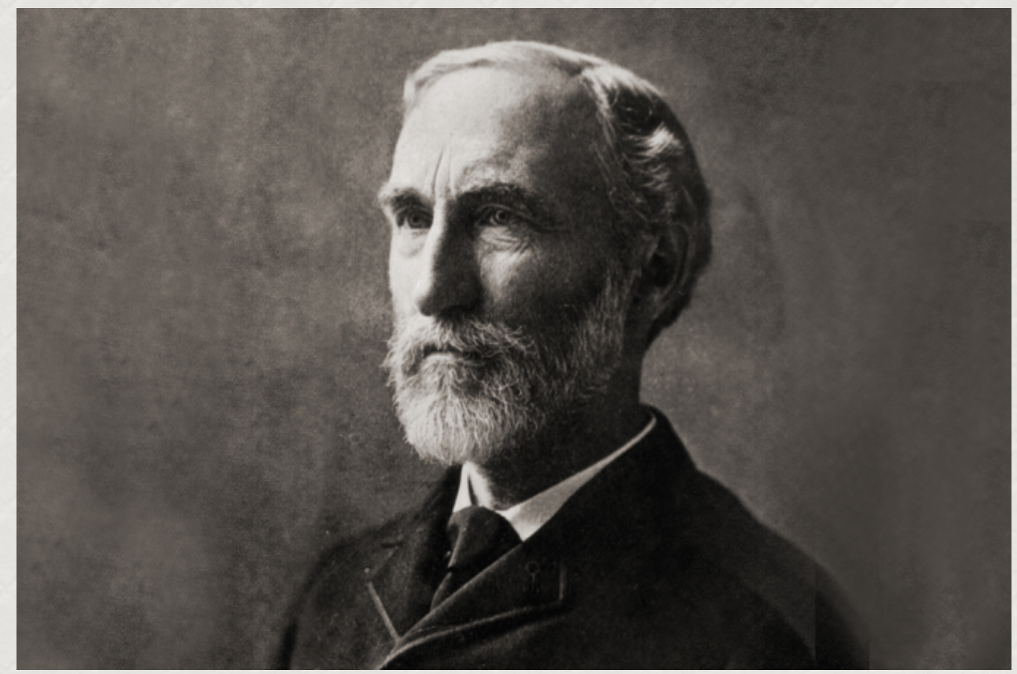
Entropia

Até onde uma noção simples pode descrever as complexidades?

Ali Tahzibi
ICMC-USP

- *Clausius (1822-88), Ludwig Boltzmann (1844-1906) e J. Willard Gibbs (1839-1903-)*

L. Boltzmann



J. Willard Gibbs:

Frases “motivadoras”

Não há emoção em fenômenos previsíveis!

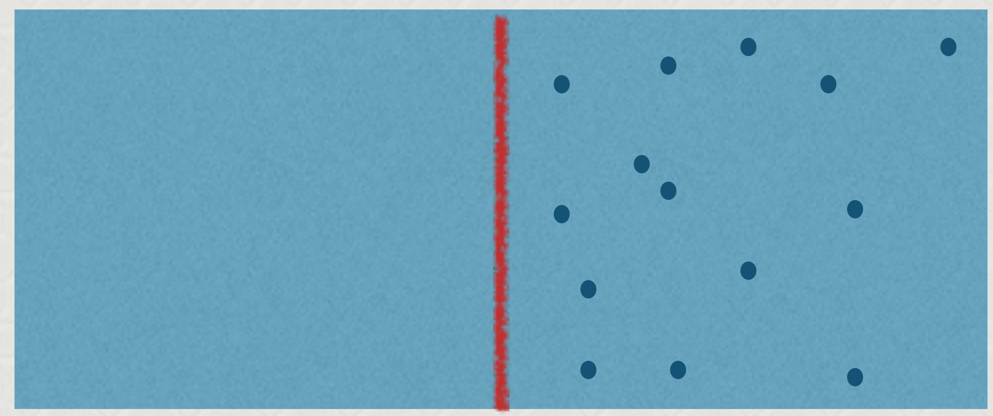
A medida que o tempo passa, conheceremos menos o mundo

Porém, não desesperem!

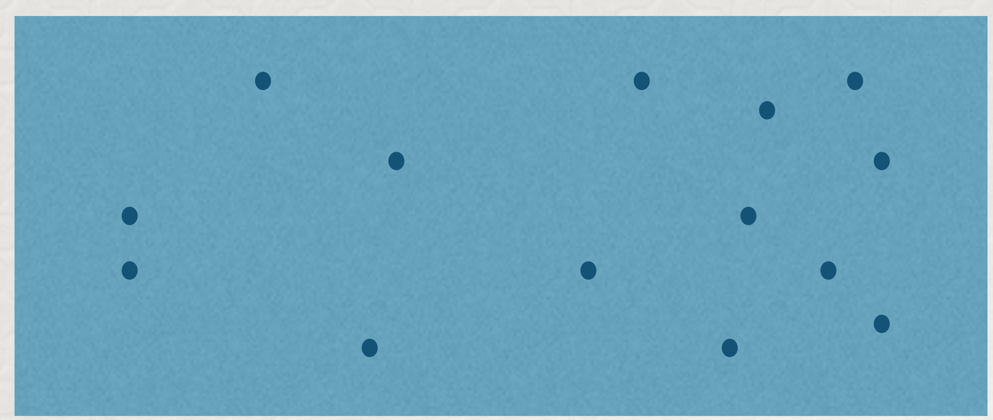
S=k log (W)

Mecânica Estatística

Ditribuição de partículas



$f(t, x, v)$

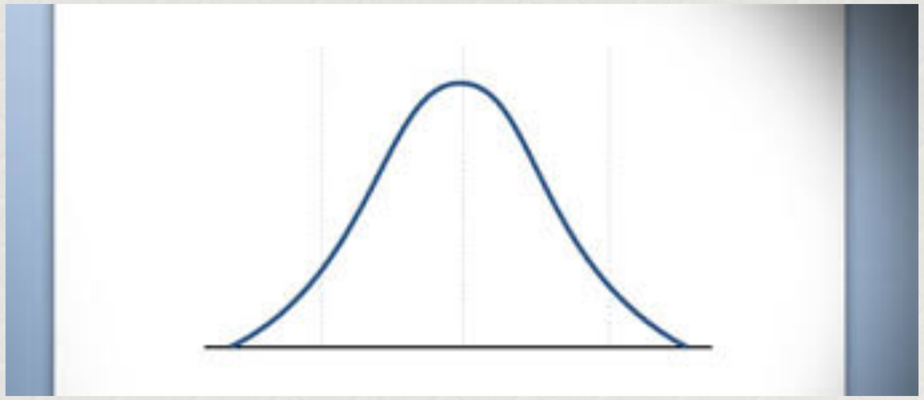


Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = Q(f, f)$$

$$S = -H(f) = -\int f(x, v) \log f(x, v) dv dx$$

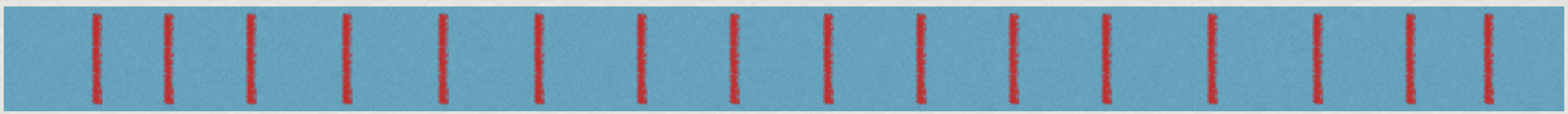
$$S^{'} > 0$$



Toscani- Villani

Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$



K células *n: Partículas* p_i *Distribuição*

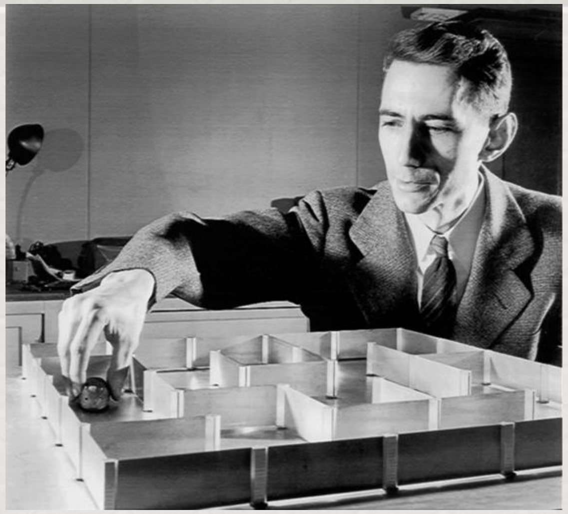
$$\binom{n}{np_1}\binom{n-np_1}{np_2}\cdots\binom{n-np_1-np_2-\cdots np_{k-1}}{np_k}$$

$$= \frac{n!}{(np_1)!\cdots(np_k)!} \sim \frac{1}{p_1^{np_1}p_2^{np_2}\cdots p_k^{np_k}} = e^{nH}$$

$$H = -\sum_{I=1} kp_i \log(p_i))$$

Entropia: A incerteza determina valor da informação (Shannon)

Pai da Teoria de informação



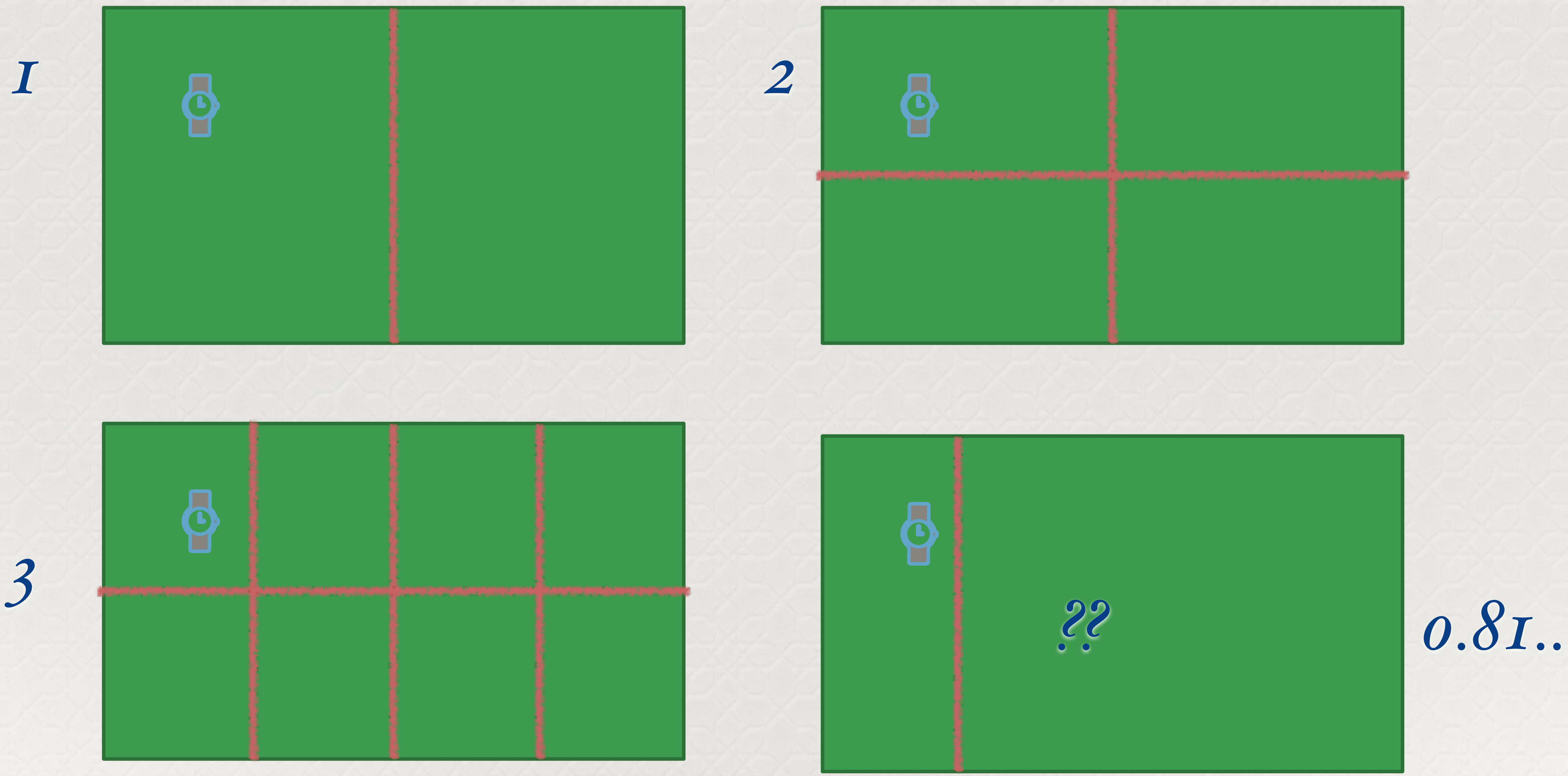
- *Shannon perguntou a Von Neuman, como denotar?*
- *Chama de entropia! Ninguém sabe ao certo o que é! Então nas discussões ganhará!*

Shannon entropy

$$I(\Lambda) = -k \log(\mu(\Lambda))$$

- *Um fenômeno com probabilidade total tem incerteza zero.*
- *Pouca probabilidade, mais incerteza*
- *Fenômenos independentes, somam incertezas*

Chave perdida no campo



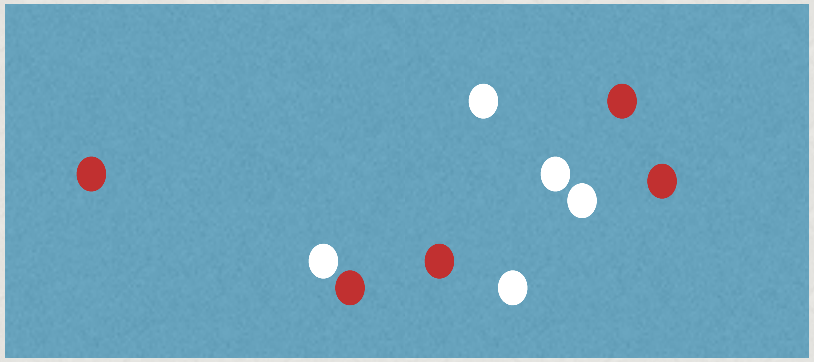
Shannon entropy

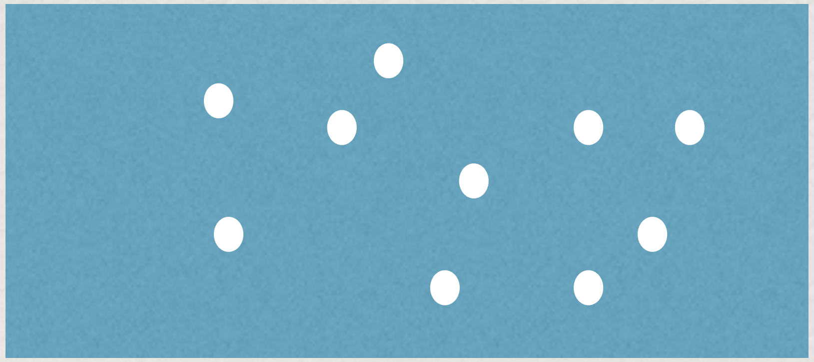
$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \cdots P_n\}$$

$$H(\mathcal{P}) = -\sum p_i \log(p_i)$$

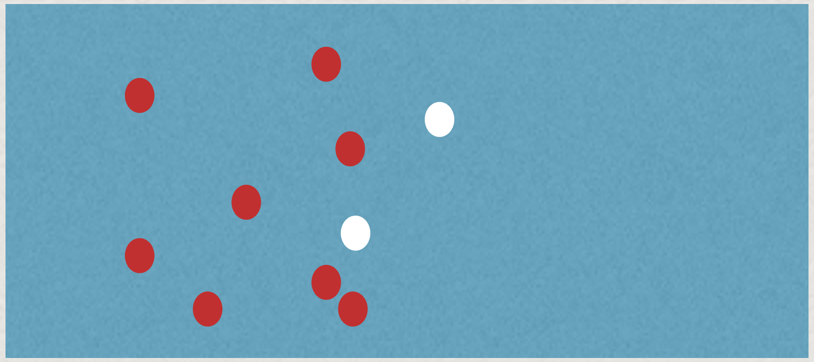
Informação escondida numa partição
A cor sobre número da bola!

$$-(1/2log(1/2)+1/2log(1/2))=1$$



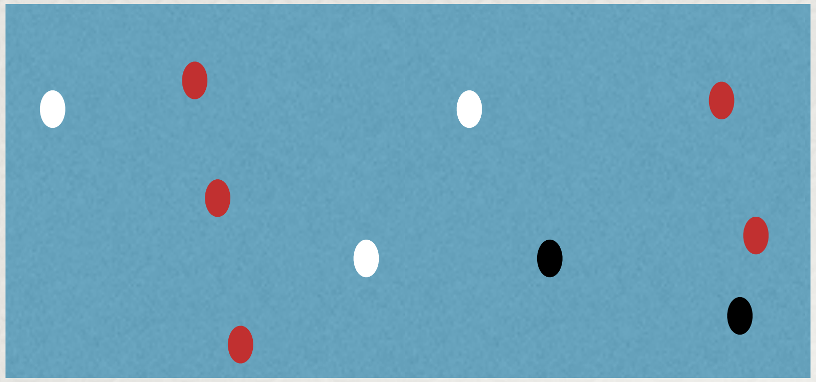


$$<1$$



0

$$-(0.2log(0.2)+0.3log(0.3)+0.5log(0.5))\sim 1.49$$



Multiplicadores de Lagrange

$$f(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

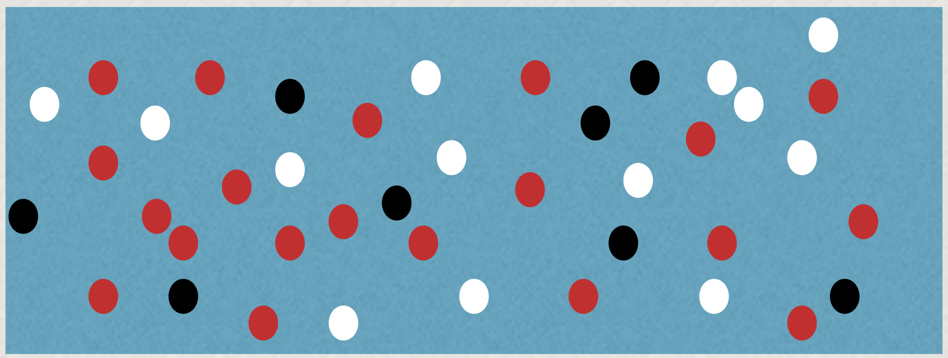
$$g(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$Df = -(1 + \log(p_1), \cdots, 1 + \log(p_n))$$

$$Df = \lambda Dg$$

$$p_i = p_j \Rightarrow p_i = 1/n.$$

Jogo de Sim ou Não



● (vermelha)	*0.5*	*Prob.*
● (preta)	*0.2*	
● (branca)	*0.3*	

انتخاب یک توپ به طور تصادفی و کشف رنگ توپ با پرسشهای از نوع بله و خیر

P1: A bola é preta ou branca?

Sim: P2
Não: Vermelha

P2: A bola é preta?

Dividir o conjunto em dois subconjuntos com a probabilidade mais próximo possível P1, P2

Dividir a resposta da P1 em dois subconjuntos com probabilidade mais próximo possível

...

Continuar o algoritmo até chegar apenas duas cores.

Número de perguntas e entropia

$-(0.2log(0.2) + 0.3log(0.3) + 0.5log(0.5)) \sim 1.49$ $\quad$ $0.5 + 0.2 \times 2 + 0.3 \times 2 = 1.5$

N_i: Número de perguntas até chegar a cor i

$$h = -\sum p_i \log_2 p_i \leq \sum p_i N_i$$

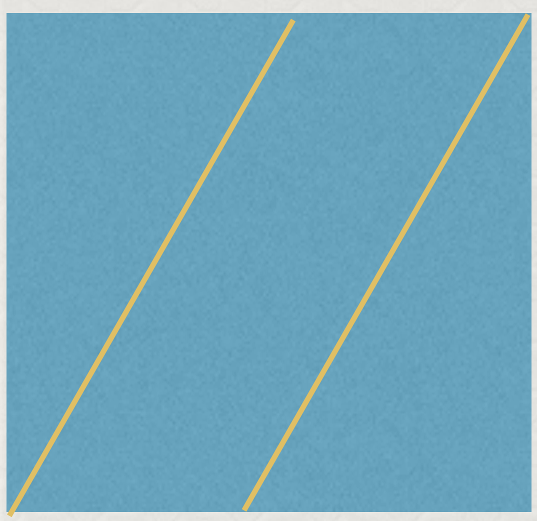
Entropia $\leq$ Média de perguntas

Sistemas Dinâmicos

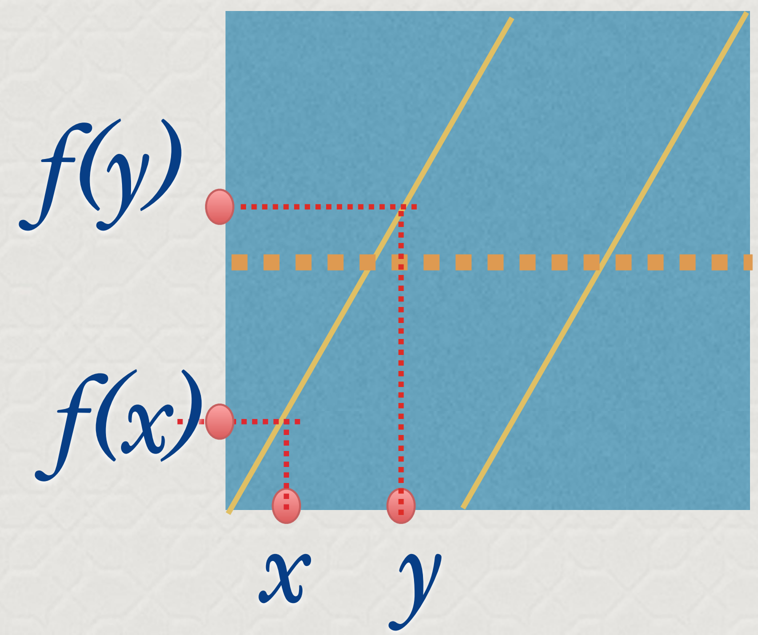
- *Kolmogorov (1903- 1987), (Kakutani), Sinai (1935 ,-)*
- *Sinai (Prêmio Abel 2014).*

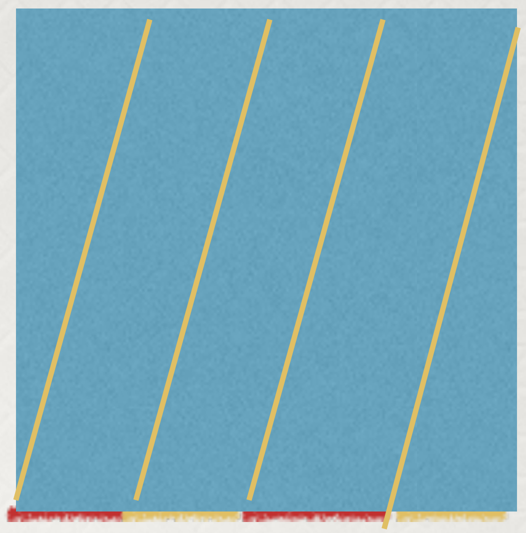
Primeiramente pensava que entropia apenas separa estocástico de determinístico!

Sistmas Dinâmicos



$$f(x) = 2x(mod - 1)$$





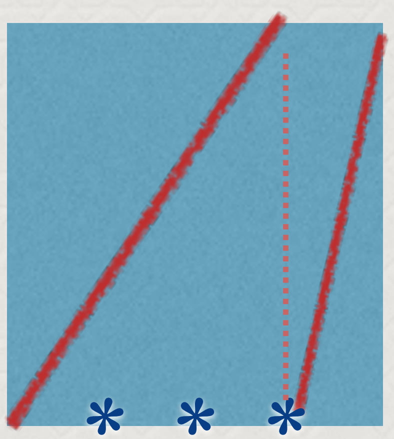
Taxa de criação de informação

$$\log(4) - \log(2) = \log(2)$$

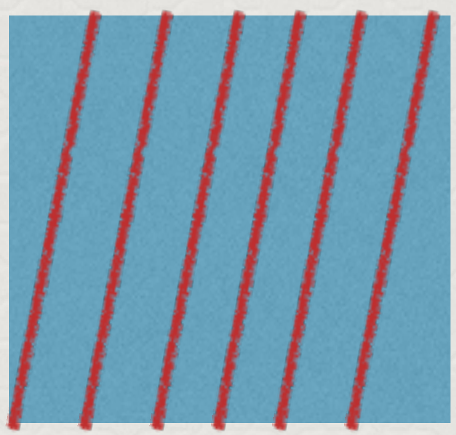
$$\log(2^n) - \log(2^{n-1}) = \log(2)$$

Lançamento de moeda ou Roda da sorte

$$h = -\sum p_i \log(p_i)$$



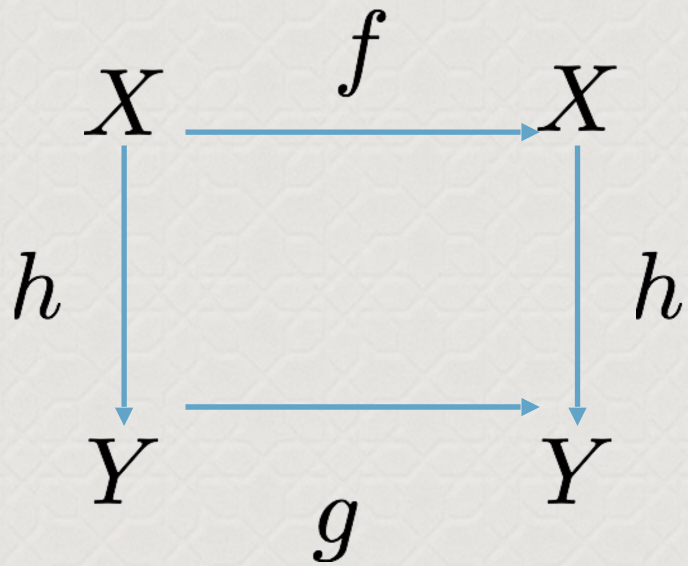
0.81



$log_2(6) \sim 2.58$

Conjugação Dinâmica

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$



Topologicamente conjugado : *homeomorfismo* h

Metricamente conjugado: Preservando medida h

Entropia como invariante

Sistemas Conjugados tem estropias iguais.

Não é invariante completa:

- *Identidade*
- *Rotação*

Ornstein

- *Ornstein: Duas rodas da sorte com mesma entropia são conjugadas metricamente.*
- *Entropia é invariante completo no mundo dos sistemas mais aleatório possível.*

Entropia métrica

$$B_n(x,\epsilon) := \{y | d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon\}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{-1}{n} \log \mu(B_n(x,\epsilon))$$

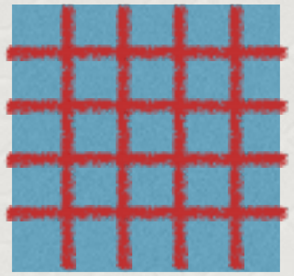
Exemplo 2x (mod-1) $\mu(B_n(x,\epsilon)) = \frac{2\epsilon}{2^n}$

Dimensão

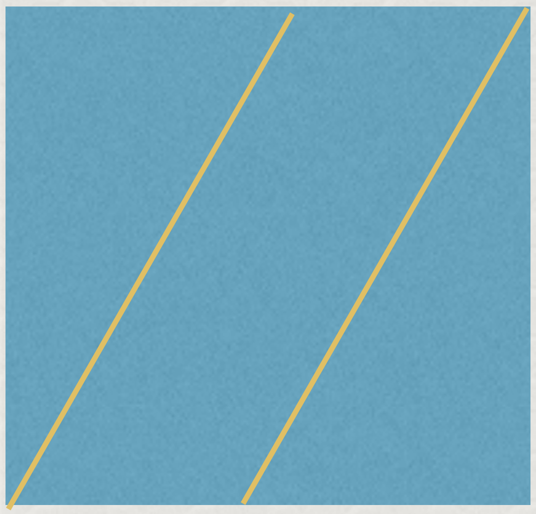
- *Dimensão de um conjunto é o "número" das informações necessárias para localizar os pontos do conjunto.*

Capacity dimension: $\dim_K(S)$

$$-\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log \epsilon}$$



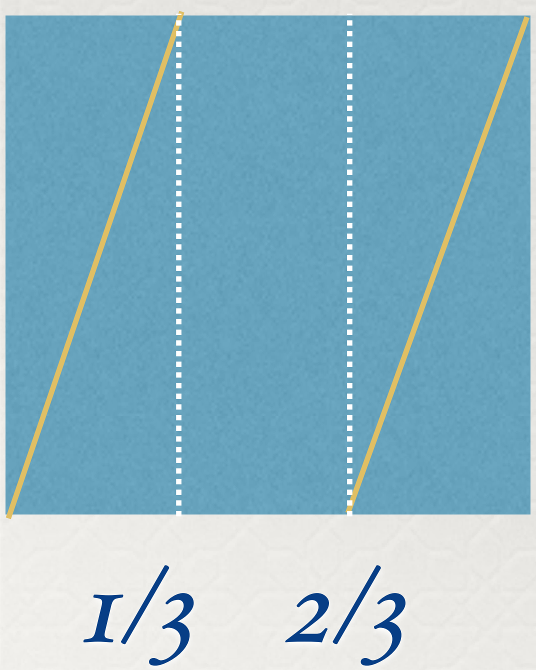
Cobertura ótima com abertos de diâmetro menor que ϵ



$f(x) = 2x(mod - 1)$

$log(2)$ Expoente de expansão

$log(2)$ *entropia*



Conjunto de Cantor

$log(3)$ Expansão

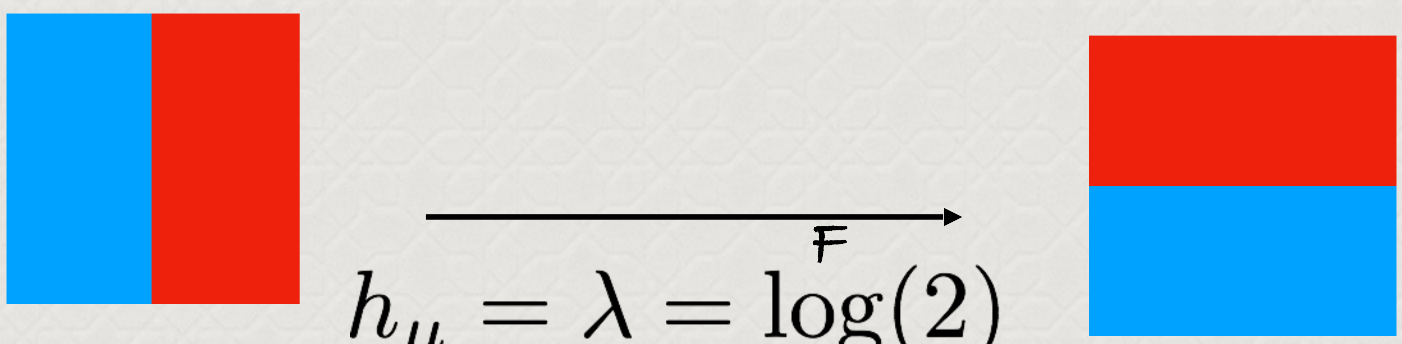
$log(2)$ *Entropia*

$log(2)/log(3)$ *Dimensão*

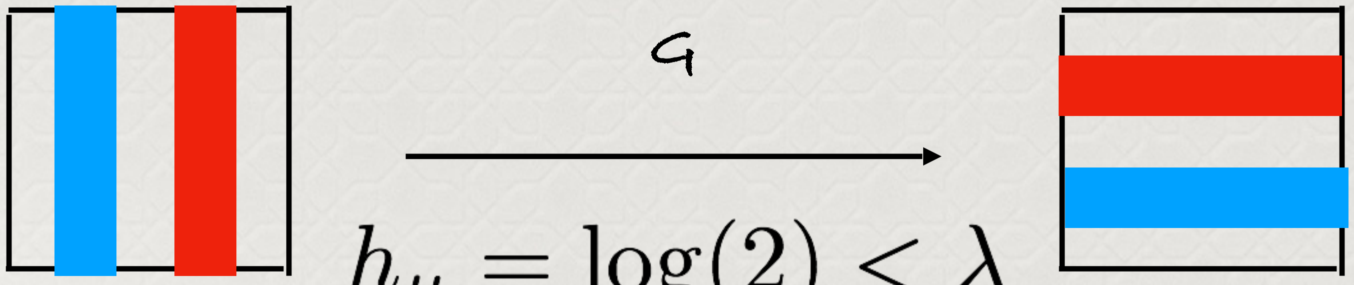
Ruelle

$$h_\mu \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

μ

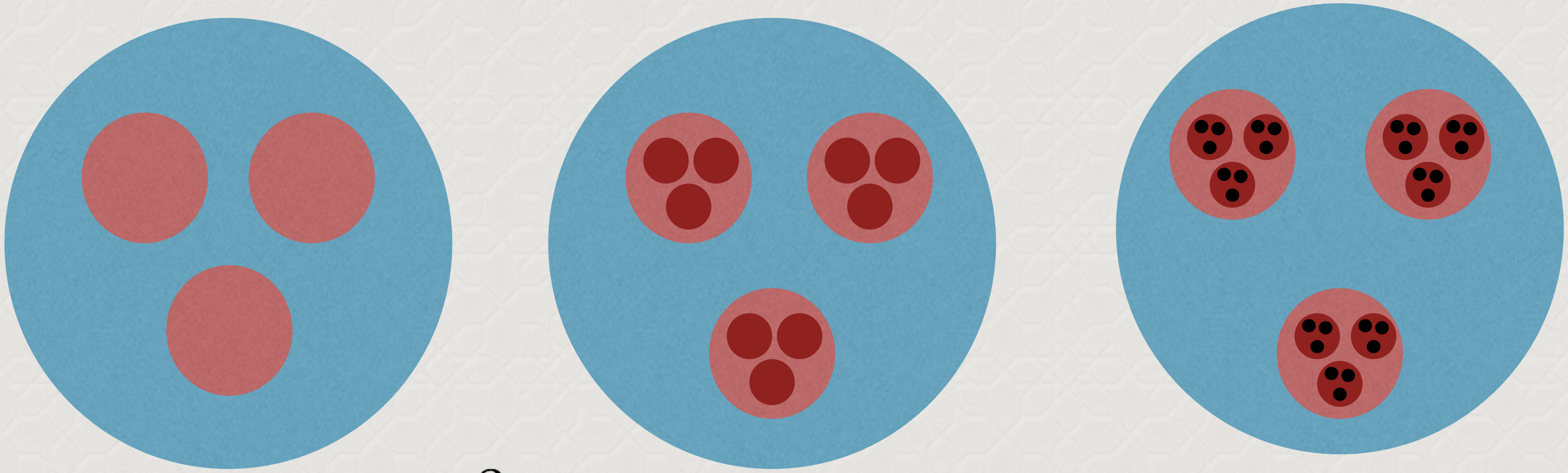


$$h_\mu = \lambda = \log(2)$$



$$h_\mu = \log(2) < \lambda$$

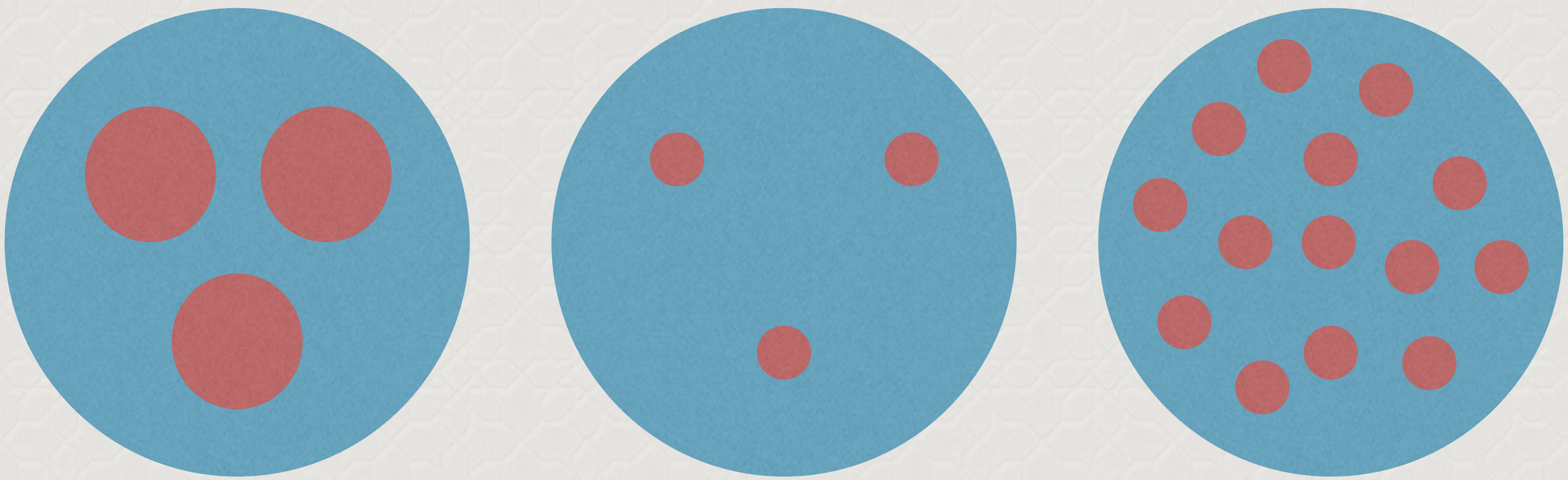
Dimensão × Expansão = Entropia



$$F : \bigcup_{i=1}^{3} B_i \to B$$

$$\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(B)$$

انبساط×بعد = آنتروپی



Obrigado pela atenção