Visualização de objetos
ou,
Geometria de curvas e superfícies

Farid Tari, ICMC-USP

Math Day VI, Universidade Federal de Viçosa, 29-30/10/2020

Objetivo

- Despertar sua curiosidade sobre a visualização de objetos.
- Indicar alguns ramos de pesquisa em matemática sobre o tema (do ponto de vista da teoria de singularidades).

Conteúdo

1. Curvas planas: exemplos, curvatura, pontos especias
2. Superfícies: exemplos, curvatura(s), superfícies especiais.

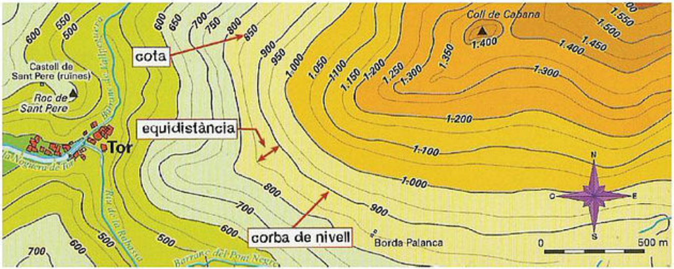
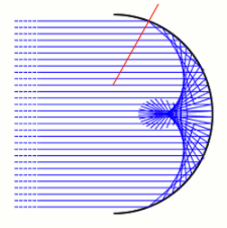
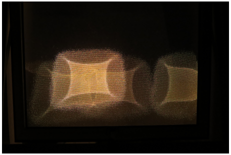


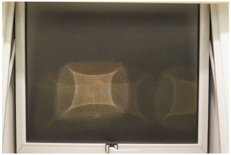
Figura 3. Curvas de nivel en un mapa.

Fonte: www.portaldemapas.commine-net.blogspot.com

§1. Curvas: Causticas e envelopes

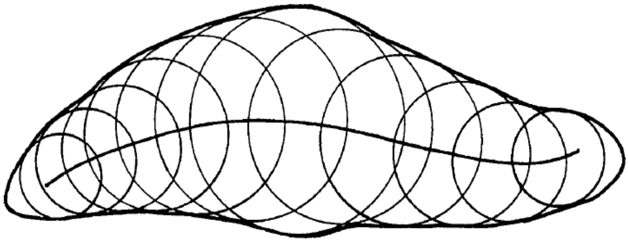






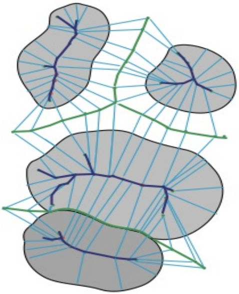
Fonte: wikipedia.com, google, janela da minha casa

§1. Curvas: Estrutura esquelética



O eixo medial de Blum [Giblin-Brassett, 1985].

§1. Curvas: Estrutura de ligação esquelética



A estrutura de ligação esquelética capta não somente a forma de cada objeto mas também a posição relativa dos objetos [James Damon and Ellen Gasparovic, Medial/skeletal linking structures for multi-region. Memoires of the AMS, V. 250, 2017].

Definição

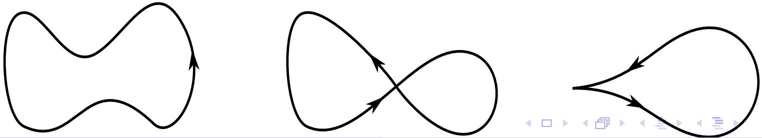
Uma curva plana C é a imagem de uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. A aplicação γ é chamada parametrização da curva C.

Escrevemos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e supomos que x, y são funções diferenciáveis.

Vetor tangente: $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$

A curva γ é **regular** se $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ para todo t.

Se $\gamma'(t_0) = (0, 0)$, dizemos que γ é **singular** no ponto t_0, (ou, t_0 **é uma singularidade** de γ).



§1. Curvas: Retas e círculos

- Reta pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ e paralela a $\vec{v} = (a, b)$:

$$\gamma(t) = (x_0 + at,\ y_0 + bt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

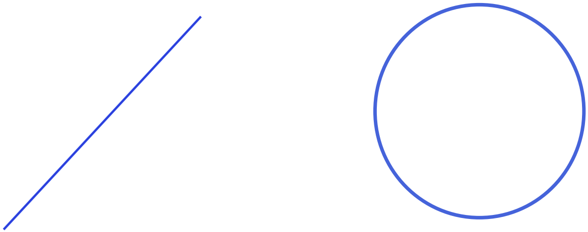
- Círculo de centro $p_0 = (x_0, y_0)$ e raio r:

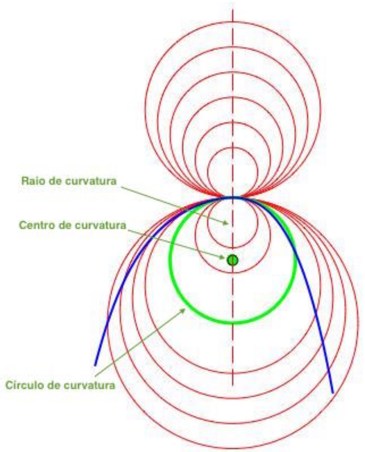
$$\gamma(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)), t \in \mathbb{R}.$$

§1. Curvas: Curvatura da reta e do círculo

Vamos concordar que:

- a reta não é curvada, i.e., tem curvatura $\kappa = 0$ em todos os seus pontos.
- o círculo de raio r tem a mesma curvatura em todos os seus pontos, igual a $\kappa = 1/r$.




Raio de curvatura
Centro de curvatura
Circulo de curvatura

$$\kappa(t) = 1/r(t)$$

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, i.e., $||\gamma'(t)|| = 1$ para todo $t \in I$. Então a *curvatura* de γ em t é

$$\kappa(t) = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle.$$

Para $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}(t)$$

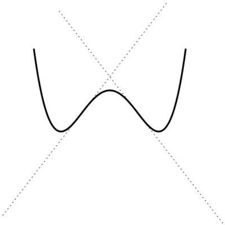
A curvatura de uma curva determina a curva:

Teorema

Dada uma função $\kappa : I \to \mathbb{R}$, existe uma única curva C (a menos de uma translação e/ou rotação) cuja curvatura em cada ponto $t \in I$ é igual a $\kappa(t)$.

Os pontos de interesse são onde $\kappa(t) = 0$, chamados de pontos de **inflexão** (se $\gamma(t) = (t, f(t))$ é o gráfico de f, $\kappa(t) = f''(t)/(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}$. Logo, $\kappa(t) = 0 \iff f''(t) = 0$) e os pontos onde $\kappa'(t) = 0$, chamados **vértices**.

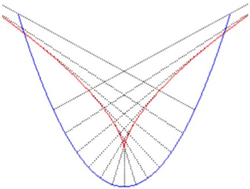
É "fácil" localizar os pontos de inflexão.

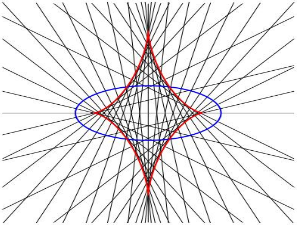


Como localizar os vértices de uma curva?

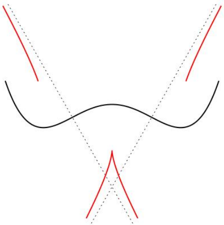
§1. Curvas: Evoluta

Juntamos os centros dos círculos de curvatura (osculadores) da curva γ para formar uma nova curva plana chamada **evoluta** da curva γ. (Temos $e(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$.)
A evoluta também é o envelope das retas normais a curva, ou seja, a evoluta é uma caustica.

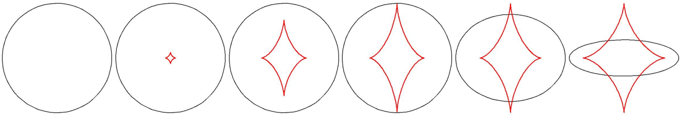




A evoluta de γ é singular no ponto t se, e somente se, $\gamma(t)$ é um vértice da curva γ.



§1. Curvas: Vértices



Teorema

Toda curva fechada, simples e convexa (i.e., curva com curvatura estritamente positiva) tem pelo menos 4 vértices.

[Mario Jorge Dias Carneiro e Ronaldo Alves Garcia, O teorema dos quatro vértices e sua recíproca. VIII Bienal da SBM, 2017.]

§1. Curvas: Vértices

$\gamma(t) = (t, f(t))$, f um polinômio de grau n, i.e.,

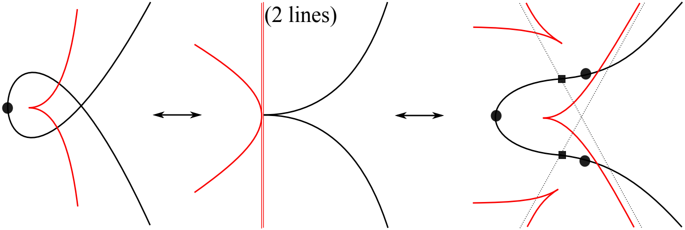
$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Quantos vértices a curva γ tem?

$$\kappa'(t) = 0 \iff \left((1 + f'^2) f''' - 3 f' f''^2\right)(t) = 0$$

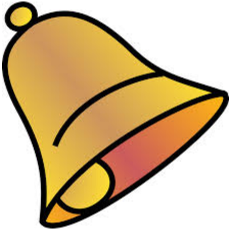
Conjetura (Edwards-Gordon, 2004)

O gráfico de um polinômio de grau n tem no máximo $n - 1$ vértices.



Deformação geométrica da cúspide [Salarinoghabi-T, 2017].

§2. Superfícies: superfícies de objetos



§2. Superfícies: na arquitetura

MIT, Frank Gehry

§2. Superfícies: na arquitetura


NY, Frank Gehry

Superfícies: na arquitetura

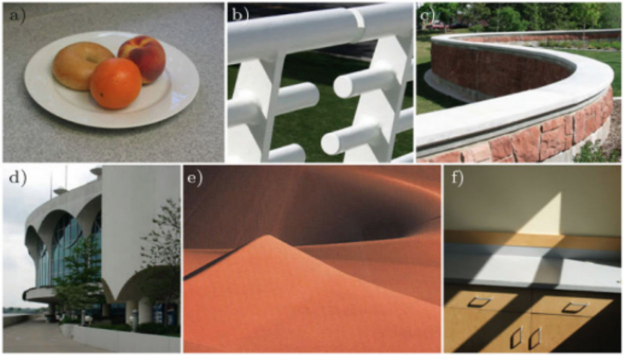
Walt Disney Concert Hall, Frank Gehry

§2. Superfícies: na arquitetura

Oscar Neimeyer

§2. Superfícies: Projeções

§2. Superfícies: Imagens de superfícies



[James Damon, Peter Giblin, and Gareth Haslinger, *Local Feature in Natural Images via Singularity Theory*. Springer, 2016.]

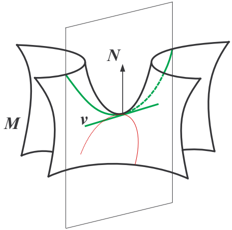
§2. Superfícies: Características robustas

§2. Superfícies: "Definição"

Definição

Uma superfície M em $\mathbb{R}^3$ *é a imagem, ao redor de todos os seus pontos, de uma aplicação diferenciável* $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, ou seja, M é localmente uma deformação do plano.*

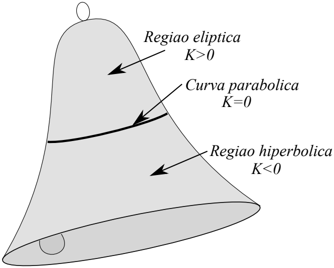
Intersectamos a superfície M com o plano que contem o ponto $p \in M$ e é paralelo a um vetor tangente v e ao vetor normal N em p. Obtemos uma curva plana com curvatura $\kappa_{\mathrm{v}}(p)$ no ponto p.



Temos

$$\kappa_{min}(p) \leq \kappa_{\mathrm{v}}(p) \leq \kappa_{max}(p)$$

Curvatura Gaussiana: $K(p) = \kappa_{min}(p) \cdot \kappa_{max}(p)$
Curvatura media: $H = \frac{1}{2}(\kappa_{min} + \kappa_{max})$


Regiao eliptica
K>0
Curva parabolica
K=0
Regiao hiperbolica
K<0

O Problema Isoperimétrico (PI) clássico:
Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.
[P. K. Klaser e M. Telichevesky, SBM, 2016]

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

A rainha Dido de Cartago negociando com o Rei Jarbas a compra de terras. Ficou acertado que poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de 1(um) único touro.

§2. Superfícies: O Problema Isoperimétrico

- PI no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$: *encontrar a superfície de área fixada A que engloba o maior volume possível.*
- PI nos espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$ ...
- É um problema que é na interseção de muitas áreas em matemática: Geometria Diferencial, Teoria Variacional, Análise Harmônica etc..

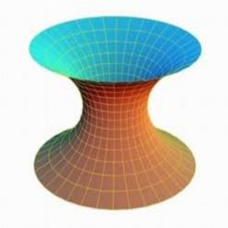
Teorema

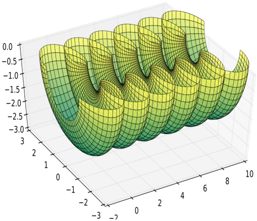
Se uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ tem área mínima dentre todas as superfícies que englobam um mesmo volume, então S tem curvatura média constante (CMC).

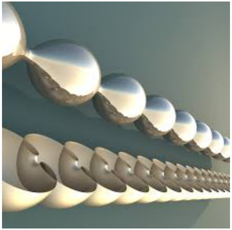
- Quais são as superfície CMC? (Quando $H = 0$ a superfície é chamada superfície mínima.)
- Como obter tais superfícies?

§2. Superfícies: Superfícies CMC

- Uma superfície orientável S é CMC se, e somente se, a sua aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ é harmônica, i.e. $\langle N, N_{xx} + N_{yy} \rangle = 0$.
- Se uma superfície *CMC* é uma superfície fechada e completa então ela é uma esfera.
- Superfícies *CMC* de Delaunay etc...







- $K \equiv 0$: superfícies plane (planos, superfícies regradas, cones...)
- $K \equiv c > 0$: Superfícies esféricas.
- $K \equiv c < 0$: Superfícies pseudo-esféricas.

Uma superfície regular e completa é esférica se e somente se ela é uma esfera.
Vamos considerar superfície esféricas e pseudo-esféricas com singularidades.

§2. Superfícies: Exemplos de David Brander

http://davidbrander.org/Images/index.html

§2. Superfícies: Relação com as superfícies CMC

Seja $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular com vetor normal unitário N, curvatura Gaussiana K_1 e curvatura média H_1. Suponha que $H_1 = c \neq 0$ (g é CMC). Considere a superfície paralela

$$f(x, y) = g(x, y) + r \cdot N(x, y), \; r = \frac{1}{2H_1}$$

Temos

$$f_x \times f_y = \frac{K_1}{4H_1^2} g_x \times g_y.$$

Portanto:

- f é regular em $(x, y) \iff K_1(x, y) \neq 0$.
- Quando f é regular, f e g tem o mesmo vetor normal unitário.

As curvaturas Gaussian e media de f são:

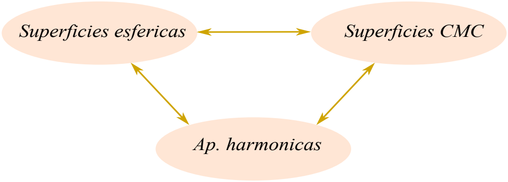
$$K = 4H_1^2, \qquad H = \frac{2H_1(2H_1^2 - 1)}{K_1},$$

f é uma superfície esférica!

f é singular em $(x, y) \iff (x, y)$ é um ponto parabólico de g.

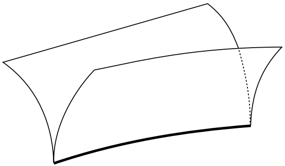
Reciprocamente, se f é uma superfície regular esférica com curvatura Gaussiana K e vetor normal unitário N, então $g = f \mp N/\sqrt{K}$ é uma superfície CMC e $H_1 = \pm\sqrt{K}/2$.

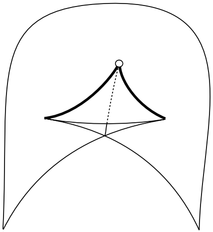
§2. Superfícies: Relação com as superfícies CMC



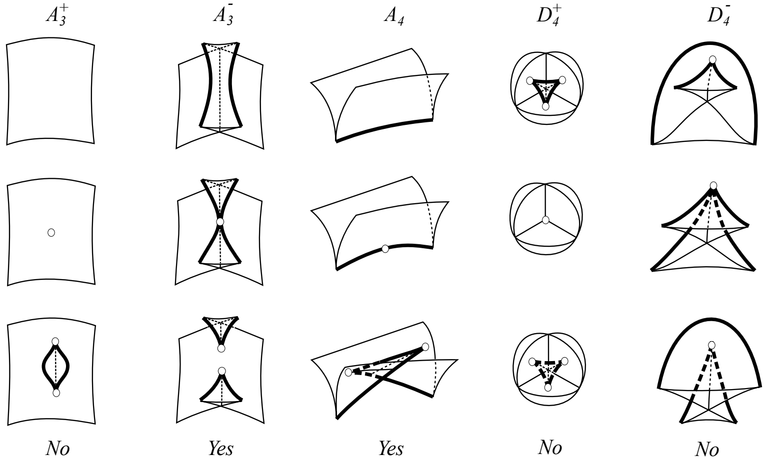
§2. Superfícies: Singularidades estáveis de superfícies esféricas

Singularidades estáveis: edge cuspidal (A_2) e rabo de andorinha (A_3) .



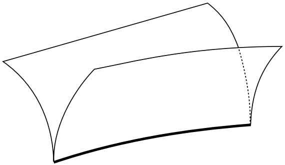


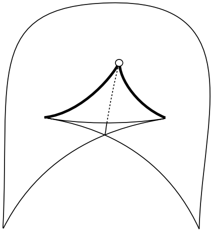
§2. Superfícies: Bifurcações em famílias a 1-parâmetro [Brander-T, 2019]



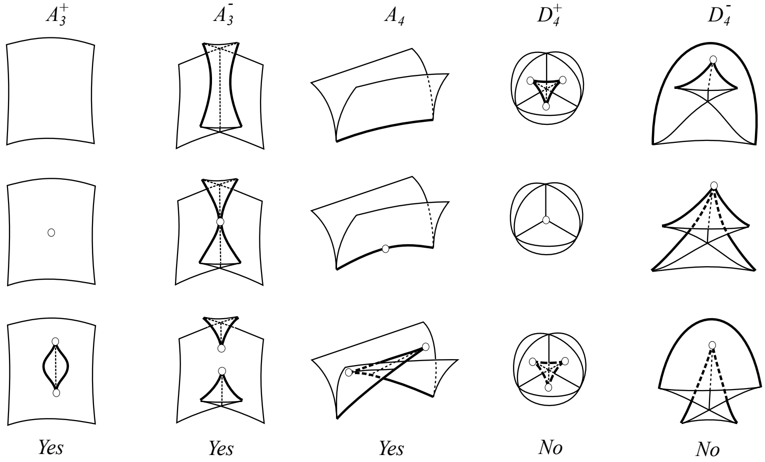
§2. Superfícies: Singularidades estáveis de superfícies pseudo-esféricas

Singularidades estáveis: edge cuspidal (A_2) e rabo de andorinha (A_3) .

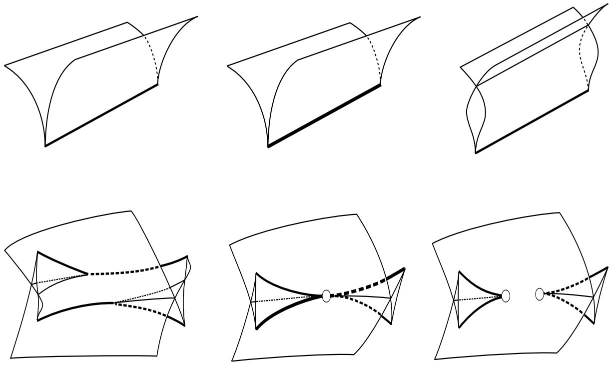




§2. Superfícies: Bifurcações em famílias a 1-parâmetro [Brander-T, 202?]



§2. Superfícies: Bifurcações em famílias a 1-parâmetro [Brander-T, 202?]



Obrigado pela atenção!